

COMPLEXITÉ DES ÉQUILIBRES ISSUS DE LA THÉORIE DES JEUX

Présentation de Stage pour le DEA Algorithmique

Jury : Anca Muscholl, Béatrice Bérard, Jean Eric Pin, Patricia Boyer, Mireille Regnier,
Michel de Rougemont.

Adrien VIEILLERIBIÈRE

2 juillet 2004

0.1 Remerciements

Je tiens à remercier tout particulièrement Monsieur Michel de Rougemont, mon maître de stage, pour ses conseils avisés et son soutien.

Nos échanges fructueux ont renforcé ma motivation et ont orienté positivement mes thèmes de recherche.

Je remercie également toute l'équipe du Laboratoire de Recherche en Informatique d'Orsay qui a facilité mon intégration au sein du groupe.

Mes derniers remerciements iront à Nicolas Barrère, Thomas Peyriot, Aude Nollet et ma famille pour leur patience sans limite ainsi que leurs nombreuses attentions à la rigueur rédactionnelle.

Table des matières

0.1	Remerciements	1
0.2	Introduction	6
I	APPROXIMATION DE POINTS FIXES	9
1	Le lemme de Sperner généralisé	12
1.1	Le cas dans le plan du lemme de Sperner	12
1.2	Le cas de la dimension 3	14
1.2.1	Décomposition du cube	14
1.2.2	Sperner en dimension 3	16
1.3	Extension en dimensions supérieures : la vision hypercube	17
1.3.1	Simplexes et triangulation	17
1.3.2	Triangulations de l'hypercube de finesse croissante	18
1.4	Vision hyper tétraédrique	19
1.4.1	Contraintes	19
1.4.2	Subdivision	20
1.5	Difficulté	21
1.5.1	Quelques classes de complexité	21
1.5.2	PPAD-completude	22
2	Une première méthode d'approximation	23
2.1	Point fixe de Brouwer	23
2.2	Coloriage associé	23
2.3	Lien Sperner, ϵ -points fixes	24
2.4	Des simplexes aux compacts convexes	25
2.5	Algorithme de Scarf et notions linéaires sous-jacentes	25
2.5.1	Primitifs	25
2.5.2	Mise en pratique algorithmique de l'approximation	29
2.5.3	Optimisation pour une subdivision particulière	30
2.5.4	Performances	30
2.6	Extension : Bases faisables.	32
3	Discussion et perspectives	33
4	Bibliographie	34

II	EQUILIBRE D'ARROW DEBREU	35
5	Calcul polynomial des équilibres d'Arrow Debreu avec utilités linéaires	38
5.1	Premiers liens avec les flots	38
5.2	Initialisation des prix	39
5.3	Augmentation des prix	39
5.4	Un algorithme	41
5.4.1	Exemple	42
5.5	Vers une approximation polynomiale	45
6	Extension polynomiale : Utilités de Leontief	46
6.1	Le problème CP	46
6.1.1	Exemple	47
6.2	Le problème FEAS	47
6.3	Nécessité de l'approximation	48
6.4	Généralisation : le problème CPG	48
6.5	Approximation polynomiale pour des utilités de Leontief	49
7	Vers une formalisation générale et une approximation exponentielle	50
7.1	Réduction à un problème de point fixe	51
7.2	Une approximation exponentielle pour des fonctions fortement non linéaires	51
7.2.1	Interprétation d'un point de vue d'échange de marchandises :	51
7.2.2	Spécification des données :	52
7.2.3	Propriété du point fixe :	52
8	Discussion et perspectives	53
9	Bibliographie	54
III	EQUILIBRE DE NASH	55
10	Présentation du problème	58
11	Equilibres de Nash par une approche de point fixe	59
12	Deux joueurs : Vers Lemke-Howson	60
12.1	Retour aux stratégies pures pour une réduction à un problème de programmation linéaire (finie)	60
12.2	Jeux à somme nulle : Théorème min-max.	61
12.3	Jeu matriciel à somme quelconque	62
12.4	Normalisation d'un des deux joueurs pour les jeux bimatriciels	62
12.5	Lemke-Howson	63
12.5.1	Coloration de Lemke-Howson	63
12.5.2	Lemke-Howson contraint	63

13 Difficulté du cas général contraint	65
13.1 Lien SAT - Equilibres de Nash avec Contrainte supplémentaire	65
13.1.1 Preuve, Exemple et remarques	66
13.2 Corollaires : Autres problèmes contraints NP-durs	70
13.3 Dureté pour les SBG	70
14 Equilibres avec restrictions de classes de stratégies	71
14.1 Equilibre restreint et Mixité	71
14.2 Une première limite	73
14.3 Expressivité suffisante pour traiter l'approximation	73
15 ϵ-équilibre à faible support	74
15.1 Le résultat principal de Lipton, Markakis et Mehta	74
15.1.1 Preuve	75
15.2 Conséquences	77
15.3 Matrices à rang borné	78
15.3.1 Matrices approximables	78
16 Discussion et perspectives	80
17 Bibliographie	82
IV ANNEXES	83

Table des figures

1.1	Exemple de Sperner dans le plan	13
1.2	Triangulation du cube en 6 tétraèdres	14
1.3	Triangulation du cube en 12 tétraèdres	15
1.4	Triangulation arbitrairement fine du cube	16
1.5	Contraintes de coloration de Sperner dans l'espace	19
1.6	Subdivision barycentrique du triangle	20
1.7	Subdivision barycentrique étendue	20
2.1	Graphe de primitifs	26
5.1	Arrow Debreu Polynomial : prix initiaux	42
5.2	Arrow Debreu Polynomial : fin de l'initialisation des prix	43
5.3	Arrow Debreu Polynomial : Premier calcul de flot	43
5.4	Arrow Debreu Polynomial : Second calcul de flot	43
5.5	Arrow Debreu Polynomial : Fin de la première étape	44
5.6	Arrow Debreu Polynomial : Premiers Sommets gelés	44
5.7	Arrow Debreu Polynomial : Des prix optimaux	45
17.1	Equilibre : Une Preuve expérimentale	84

0.2 Introduction

La théorie des jeux se propose d'étudier toute situation dans laquelle des agents rationnels interagissent. Son champ d'application englobe, en particulier, toute la micro-économie traditionnelle, y compris le modèle de concurrence pure et parfaite, à laquelle les concepts de théorie des jeux peuvent être appliqués. Un secteur de recherches de plus en plus actifs s'intéresse aux interactions entre d'une part la théorie des jeux et des mécanismes et d'autre part l'informatique. Deux grands types de questions ont alimenté la littérature :

- Etant donné un jeu, quels sont ses équilibres ? C'est à dire quelles sont les situations où aucun des joueurs n'a intérêt à dévier de sa stratégie d'équilibre.
- Etant donné un équilibre, de quel jeu peut-il être l'équilibre ?

Vérifier qu'un vecteur (x, y) est un équilibre ou qu'un point p est un point fixe est "facile". Découvrir un équilibre n'est ni un problème de décision, ni un problème de calcul standard puisque plusieurs réponses peuvent éventuellement être retournées. Par contre sa version décisionnelle est dans $NP \cap coNP$. Cependant, et contrairement aux problèmes NP classiques, on peut parler de fonctions totales et de la classe TFNP (Total Functions of NP). Les problèmes totaux sont ceux dont on sait que chaque instance possède une solution. Sous certaines hypothèses (la fonction est continue d'un simplexe dans lui-même, les joueurs ont des utilités continues, les acteurs économiques ont des utilités continues), il existe toujours un point fixe, un équilibre de Nash, ou un équilibre d'Arrow-Debreu. Une propriété intéressante des problèmes totaux a été montrée par N.Megiddo et C.Papadimitriou : ces problèmes ne peuvent pas être FNP difficiles sauf dans le cas $NP = coNP$. Pourtant, l'appartenance de tels problèmes à P est un problème ouvert et ce domaine d'investigation est donc particulièrement stimulant vis-à-vis des situations "éventuellement entre P et NP ".

Les questions fondamentales qui se posent sont :

- Est-il possible de calculer efficacement et de façon exacte ce point fixe ou cet équilibre ?
- Est-il possible d'approximer ce point fixe ou cet équilibre ?
- Est-il possible de vérifier approximativement ce point fixe ou cet équilibre ?

Les liens fondamentaux entre notions de point fixe, d'équilibre de Nash et d'Arrow-Debreu que nous essayerons d'établir dans ce mémoire, visent à désigner plusieurs restrictions qui nous amènent à des résolutions efficaces de calcul d'équilibre. Nous tenterons aussi de saisir en quoi les cas généraux sont significativement plus difficiles. Le compromis sera alors de trouver des classes de fonctions telles qu'il soit possible, en un temps raisonnable, de répondre aux questions précédentes.

Une particularité commune aux équilibres de Nash et aux équilibres d'Arrow-Debreu est la possibilité de les voir comme des points fixes de fonctions continues. Dans ce cadre, nous disposons d'un outil d'approximation : l'algorithme de Scarf, qui pourra être vu comme un moyen d'approcher ces équilibres.

Le développement d'internet met en jeu un grand nombre de personnes qui interagissent au travers de protocoles. On peut alors considérer que ces protocoles déterminent un jeu. Par exemple la stabilité du trafic IP entre routeurs peut être considérée comme l'équilibre d'un jeu qui reste à définir. Pour réduire le SPAM du courrier électronique, on peut rechercher comment changer les protocoles de communication, tels qu'à l'équilibre on ne rencontre plus de SPAM. Une réponse à ce problème fournirait une élégante manière de filtrer le courrier électronique. Les notions de la théorie des jeux permettent plus généralement de modéliser des processus de décision dans des situations incertaines. L'intégration de l'information dans des questions actuelles de masses de données, ou de flux continus de données, peut être modélisée sous forme de jeu.

Il est maintenant classique que certaines techniques de programmation linéaire, utilisant la notion de complémentarité, s'appliquent au calcul d'équilibres. Par exemple, l'algorithme de Lemke-Howson, apparu dans le cadre de la résolution de systèmes linéaires, peut être adapté à la recherche d'un équilibre de Nash dans un jeu à deux joueurs.

On verra que certaines restrictions tendent à rendre NP-dur la question d'existence d'un équilibre possédant une contrainte supplémentaire. Ce phénomène laisse supposer que la complexité classique n'est pas nécessairement adaptée à ce cadre, et qu'il peut être judicieux de s'interroger sur les modèles d'approximation. La technique de réduction utilisée pour SAT souffre de l'aspect discret des jeux que l'on a associé aux formules logiques. Elle ne permet pas immédiatement de définir une distance intéressante entre les matrices d'entrée considérées, donc élude l'étape cruciale de la notion d'approximation : définir une bonne distance.

Une avancée dans cette voie a été effectuée par Lipton, Markakis et Metha. Les conséquences de la définition d' ϵ -équilibre ont en effet permis de relier les notions d'approximation de l'entrée (les utilités des joueurs) et les notions d'équilibres approchés associés (ϵ -équilibre). Elles ouvrent ainsi la perspective, avec leur notion d'équilibre approché à faible support, d'intéressantes notions d'approximations.

Ce mémoire se consacre avant tout à deux questions centrales : l'existence et la difficulté de localisation des notions de points fixes, d'équilibre d'Arrow-Debreu et de Nash.

Organisation :

Ce mémoire est organisé selon trois grandes parties :

Dans la Partie I, on s'intéresse aux conditions qui permettent d'assurer l'existence de points fixes et aux outils associés à l'algorithme de Scarf (1967). Un des objectifs de cette partie est de fournir une preuve constructive détaillée du théorème de Brouwer, base essentielle du cas général des deux parties suivantes.

La Partie II est consacrée à la complexité des équilibres d'Arrow-Debreu : elle dévoile un cadre de calcul exact et polynomial des équilibres d'Arrow-Debreu (2002). Elle l'étend ensuite à un cadre plus général permettant une approximation polynomiale (2004). Elle se conclut par vision couteuse mais très générale de l'approximation au sens Scarf, dans laquelle nous verrons que les prix en équilibre correspondent au point fixe d'une fonction continue.

La Partie III est quand à elle consacrée à la complexité des notions d'équilibres de Nash. Nous y introduirons les outils permettant un calcul exact des équilibres de Nash dans les jeux à deux joueurs. Nous dévoilerons ensuite quelques notions adaptées à l'étude des équilibres de Nash pour des classes de stratégies restreintes. Le résultat essentiel qui achève la partie s'attache à l'existence d' ϵ -équilibre à faible support (2002). Il nous permettra de nous intéresser à une notion d'approximation pour les équilibres de Nash.

Première partie

APPROXIMATION DE POINTS FIXES

Point fixe : un intérêt théorique fondé

Les théorèmes d'existence et de “calcul” de points fixes ont des implications décisives dans de nombreux domaines aussi bien théoriques que pratiques.

Le cadre classique est celui d'une fonction continue d'un simplexe dans lui même : le théorème de Brouwer assure qu'elle possède un point fixe

Existence de point fixe

Historiquement, le théorème d'existence d'équilibre d'Arrow Debreu à été vu comme la conséquence du théorème d'existence de Brouwer. De la même façon, le théorème d'existence d'équilibre de Nash a été vu comme une conséquence du théorème de point fixe de Kakutani, une extension du théorème de Brouwer.

Récemment, des travaux affinent ces liens :

- C.H.Papadimitriou assure une version directe de :
“Point Fixe de Brouwer” implique “Equilibre de Nash” ;
- [JPTM02] assure “Point Fixe de Brouwer” $\Leftrightarrow$ “Equilibre de Nash” $\Leftrightarrow$ “Equilibre d'Arrow Debreu” ;
- [Zhao02], ajoute “Kakutani”, “Scarf” et “Zhao” à ce cercle d'équivalence.

Ces théorèmes parlent d'équivalence d'existence des cas généraux, et en dévoilent leur généralité expressive, sans considération de complexités.

Mais quel est donc le coût de la recherche de ce point fixe ?

Calcul de point fixe

L'effectivité du calcul de points fixes pose d'intéressantes questions computationnelles. Un apport important de la littérature pour l'effectivité de ce calcul est l'algorithme d'approximation de Scarf. L'idée directrice de cette approche est de trouver une petite sous-structure (simplexe ou primitif) dans laquelle on assure une situation d'un point fixe.

Cet algorithme permet de mettre en place une vision générale mais coûteuse de l'approximation de point fixe de fonctions continues.

Il nous permettra de faire le lien avec un point de vue totalement géométrique : chercher l'approximation d'un point fixe de la fonction continue va se transformer en chercher un sous simplexe complètement étiqueté, dont l'existence est assurée par le lemme de Sperner généralisé.

Ce dernier est *PPDA*— complet dès la dimension 3, et le manque d'efficacité de la méthode de Scarf est intimement liée à l'argument de parité . La manière de trouver la sous-structure est une marche déterministe qui mène nécessairement vers une solution. Le problème de cette approche est que la longueur du chemin vers cette “bonne” sous-structure peut être exponentielle.

Points fixes : Vers des outils logiciels

Les avancées dans le calcul et l'approximation de point fixe sont largement appliquées en mathématiques : des outils comme la méthode de Newton, les techniques Quasi-Newton et autres méthodes de convergence sont en effet à l'origine de la résolution de nombreux systèmes d'équations.

Plusieurs outils informatiques sont activement développés dans les domaines de recherches actuels très variés tels que la preuve (Coq), les Bases de Données Dédutives (Datalog, While), l'interprétation abstraite (*mu*-calcul)....

Ils dévoilent le grand pouvoir expressif des notions de points fixes, et fournissent de puissants liens vers d'autres sortes de programmation de haut niveau.

Résumé de la partie

Elle commence par la généralisation du “Lemme de Sperner”, en présentant la situation dans le plan puis une méthode de généralisation basée sur l'argument “de parité”. Nous prêterons attention aux limites de l'explosion de la décomposition arbitrairement fine d'un simplexe, en dimension finie quelconque, en apportant des solutions non optimales.

Le chapitre 2 applique ces idées en montrant en quoi le “Lemme de Sperner” assure une approximation non efficace de la notion de point fixe d'une fonction continue sur un compact convexe : le “Point fixe de Brouwer”. Nous détaillerons ensuite la structure de primitifs, ainsi que quelques-unes de ses propriétés dont le lemme de remplacement. Il permet de décrire un algorithme “tant que”, qui conserve la structure de primitif. Un point du primitif est changé de manière déterministe à chaque étape. L'algorithme termine (par un argument de parité et un nombre fini de primitifs) nécessairement dans un primitif qui approxime un point fixe.

Chapitre 1

Le lemme de Sperner généralisé

1.1 Le cas dans le plan du lemme de Sperner

Dans un triangle arbitrairement découpé en triangles, avec des contraintes de coloration sur les bords, dont on a affecté une coloration (entier) à chaque sommet du découpage, il existe nécessairement un petit triangle complètement étiqueté. Nous allons présenter une manière de découvrir cette sous-structure complète, avant de généraliser cette vision en dimension quelconque. Cette approche nous fournira un outil général qui nous permettra l'approximation (coûteuse) de la notion de point fixe de fonction continue sur un simplexe, à travers la notion de point fixe de Brouwer.

Théorème 1 (Sperner dans le plan)

*Pour une division en triangles d'un triangle ABC ,
 A (resp B , C) colorié 0 (resp 1, 2),
les points de AB sont coloriés avec 0,1, ceux de AC avec 0,2, et ceux de BC avec 1,2
 les points intérieurs étant coloriés arbitrairement,*

Alors, il existe d'un autre triangle trois colorié dans la triangulation.

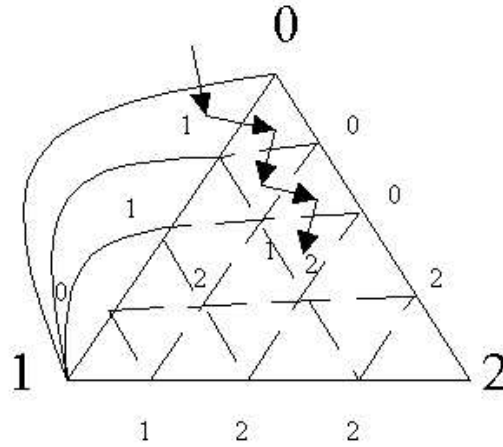


FIG. 1.1 – Exemple de Sperner dans le plan

Preuve (constructive) :

[La manière de le trouver est une marche à travers la triangulation. Commençons par relier A à tous les points de $[AB]$ et $[AC]$. On impose ainsi le déterminisme en entrée lors de la recherche. Rentrons (de l'extérieur) par l'arête extérieure $[AB]$ étiquetée $(0,1)$ (ou AC selon notre choix). On peut alors suivre l'unique chemin qui permet de toujours traverser des arêtes 2 étiquetées jusqu'à arriver sur un triangle 3 colorié. En effet, un triangle monochromatique ne sera jamais traversé (il faut une arête 2-coloriée pour rentrer), un triangle à deux couleurs aura une seule arête (distincte de celle d'entrée), et un triangle à 3 couleurs termine notre recherche. On parcourt donc un graphe dont les sommets sont de degré 0 pour un triangle monochromatique : un entrant et un sortant, donc on ne peut revenir sur un état déjà visité. On termine donc nécessairement dans un triangle 3 colorié.

[∇

On s'aperçoit que la triangulation régulière naturelle permet clairement d'obtenir, dans le cas du triangle, un diamètre arbitrairement petit.

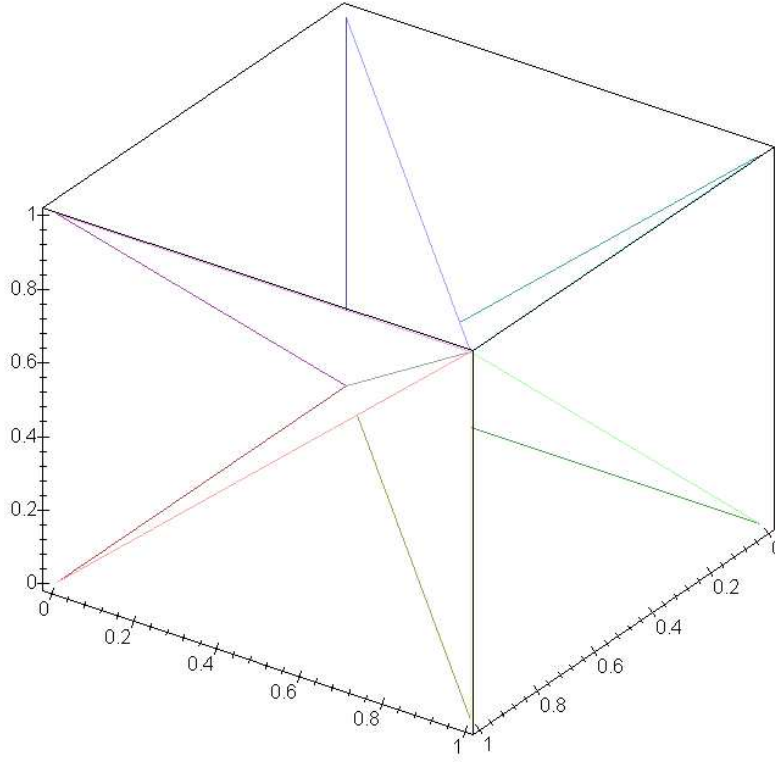


FIG. 1.2 – Triangulation du cube en 6 tétraèdres

1.2 Le cas de la dimension 3

On va s'intéresser au cas du cube.

1.2.1 Décomposition du cube

La première étape consiste à subdiviser de manière régulière le cube en cubelets ; on a déjà ainsi un contrôle arbitraire du diamètre des cubelets. On va ensuite se donner une représentation facilement manipulable des 3-triangulations (i.e. décomposition en tétraèdres) successives des cubes. A n fixé, donnons d'abord une division de chaque petit cube.

Décomposition en 6 tétraèdres :

Posons :

$$a_1 := [0, 0, 0]; a_2 := [1, 0, 0]; a_3 := [1, 1, 0]; a_4 := [0, 1, 0];$$

$$a_5 := [0, 0, 1]; a_6 := [1, 0, 1]; a_7 := [1, 1, 1]; a_8 := [0, 1, 1];$$

les 6 tétraèdres suivants partitionnent bien le cube unité

$$t_1 := [a_1, a_2, a_3, a_7]; t_2 := [a_1, a_4, a_7, a_8]; t_3 := [a_1, a_3, a_4, a_7];$$

$$t_4 := [a_1, a_5, a_7, a_8]; t_5 := [a_1, a_2, a_6, a_7] \text{ et } t_6 := [a_1, a_5, a_6, a_7].$$

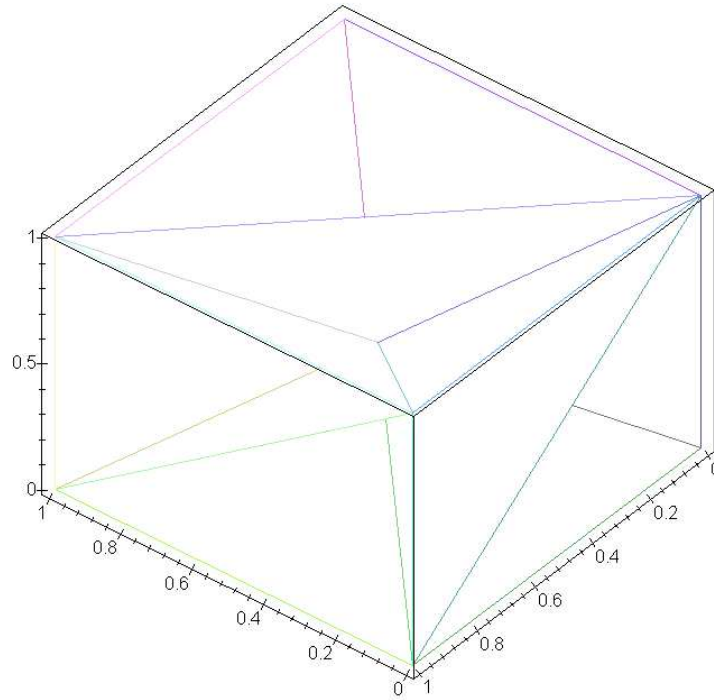


FIG. 1.3 – Triangulation du cube en 12 tétraèdres

Décomposition en 12 tétraèdres :

On peut aussi faire le choix de poser un point central, sommet des 12 tétraèdres :

En posant

$$a_0 := [0, 0, 0]; a_1 := [1, 0, 0]; a_2 := [0, 1, 0]; a_3 := [0, 0, 1]; a_4 := [1, 1, 0];$$

$$a_5 := [0, 1, 1]; a_6 := [1, 0, 1]; a_7 := [1, 1, 1]; a_8 := [.5, .5, .5].$$

On partitionne bien le cube unité en décomposant le cube en 6 pyramides (à bases carrées : une par face) elles-mêmes décomposées (par une diagonale de la base) en deux tétraèdres chacune.

On obtient une triangulation avec plus d'objets mais dont la relation d'adjacence est plus naturelle que pour celle en 6 tétraèdres :

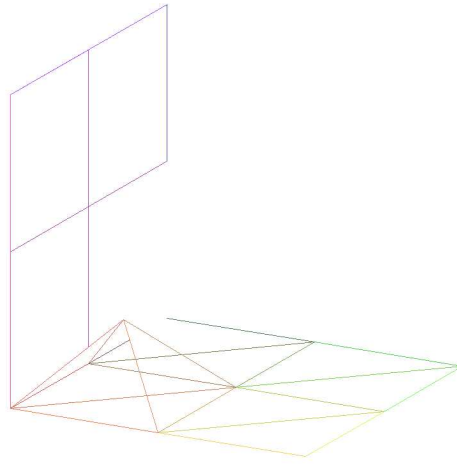


FIG. 1.4 – Idée pour une triangulation arbitrairement fine du cube

1.2.2 Sperner en dimension 3

Une fois cette étape effectuée, nous disposons d'une 3-triangulation du cube découpé.

Les contraintes sont :

- a_0 (resp. a_1, a_2, a_3) est colorié 0 (resp. 1, 2, 3).
- Pour la face engendrée par a_0, a_1 et a_2 (ainsi que celle engendrée par a_1, a_4 et a_6), on impose que la coloration des points exclut 3.

Il en va de même pour toutes les faces externes : elles définissent un hyperplan (séparateur) qui exclut exactement un point parmi $\{0, 1, 2, 3\}$ et les points de la face exclueront la couleur du sommet exclu.

Si on choisit le découpage en 12 tétraèdres, il faut alors ajouter les sommets au centre du cubelet pour achever la triangulation ; les points intérieurs étant toujours coloriés arbitrairement,

Dans ce cadre, nous pouvons affirmer :

Théorème 2 (Sperner dans 1 espace)

*Pour une subdivision en tétraèdres d'un triangle cube $ABCD$
avec les contraintes de colorations précédentes,*

Alors, il existe un tétraèdre de la triangulation qui est 4-colorié.

[On reliera au préalable le sommet 0 avec tous les sommets de $[0,1]$, $[0,2]$ ou $[0,3]$ pour rentrer par l'extérieur. On remarque que la base (engendrée par 0 1 et 2) est un cas particulier du lemme de Sperner en dimension 2 puisque les deux arêtes ne rencontrant pas 0 sont étiquetées 1 ou 2. On peut donc trouver dans la base du gros cube un triangle 3 colorié. Ce triangle 3 colorié est la base d'un unique tétraèdre. Si le nouveau sommet est 3, on a trouvé. S'il est 1, le 0, 2 et ce nouveau 1 sont la base de deux tétraèdres, dont celui dont on vient ; on se déplace donc dans l'autre. Les cas de 0 et 2 sont symétriques.

On ne rentre jamais dans des tétraèdres moins de trois coloriés, dans les trois coloriés, on a une entrée, une sortie ; on finit par en atteindre un tétraèdre quatre colorié. $\lfloor \nabla$

1.3 Extension en dimensions supérieures : la vision hypercube

1.3.1 Simplexes et triangulation

Dans l'espace euclidien de dimension d , un d -simplexe est l'enveloppe convexe de $(d+1)$ points affinement indépendants.

Une *face* est l'enveloppe convexe d'un sous-ensemble (strict) de ses coins ;

une *facette* est une face à d coins.

Une d -triangulation ou *simplexation* est une collection finie de d -simplices recouvrants le d -simplexe, telle que deux simplices sont soit disjoints, soit s'intersectant suivant une face commune.

Propriété : Chaque facette est contenue dans au plus deux d -simplices ; si on est dans le cas un seul, on parlera de *facette bornée*.

Pour une d -triangulation, on veut colorier ses points avec les couleurs $\{0, \dots, d\}$.

Un *full color simplex* est un d -simplexe avec les $(d+1)$ couleurs à ses coins.

Une *full color facette* est une facette avec les couleurs $\{1, \dots, d\}$ à ses coins.

Théorème 3 (Sperner généralisé)

*Etant donnée une d -triangulation ;
une coloration sans full color facette bornée ;
et un full color simplex :*

Alors le Lemme de Sperner nous assure qu'il existe un autre full color simplex

$\lfloor$ Les coins du simplexe de dimension d sont étiquetés par $\{0, \dots, d\}$.

Formellement, cela se montre par induction sur la dimension d :

On part d'un simplexe complet dans une $(d-1)$ face et on va nécessairement vers un full color simplexe.

On commence donc par relier tous les points des arêtes $[0, d]$ à 0. On recherche dans la base un triangle trois colorié (par Sperner en dimension 2). Ce triangle ne fait partie que d'un tétraèdre qui nous sert de point de départ pour la recherche d'une quatrième couleur dans la troisième dimension. On peut à nouveau employer l'argument de parité appliqué au graphe où les sommets sont des d -simplices, et le fait que deux simplices sont adjacents si et seulement si ils partagent une full color facette. Ce graphe est de degré maximum 2 et les full color simplices sont exactement les sommets de degré 1.

On finit donc par atteindre un simplexe complet (de la dimension supérieure). $\lfloor \nabla$

limite : On doit faire face au problème de la déclaration de la simplexation. Plusieurs pistes sont évoquées :

1. Encoder la simplexation en tant que donnée de la recherche du full color simple : La complexité introduite par cette vision est trop élevée. Elle complique la preuve de la PPAD-complétude de 3D-Sperner et en affaiblit la portée.
2. Dans le plan, le découpage du triangle équilatéral peut se faire par 4 triangles équilatéraux. Cependant, pour un tétraèdre (en trois dimensions), on y arrive mais avec 12 tétraèdres. On obtient bien une simplexation arbitrairement fine (k divisions entraînant 12^k tétraèdres). Cette vision est néanmoins encore mal adaptée à la preuve de PPAD-complétude .
3. On peut espérer englober le solide dans une simplexation plus simple (non nécessairement régulière) en autorisant par exemple les pyramides à base rectangulaire. Les possibilités offertes semblent alors mal supporter l'épreuve de l'augmentation de dimensions du problème.

La manière la mieux adaptée aux ambitions de [Pap91] semble être une description du problème sur les hypercubes : **kD-Sperner** :

Entrées :

n : associé au découpage,

k : associé à la dimension de l'espace

Un algorithme polynomial calculant une coloration admissible de tous les points de la division en n^k petits hypercubes.

Problème : Trouver un petit hypercube avec $(k + 1)$ couleurs.

Mise en oeuvre : On s'intéresse à l'hypercube unitaire.

On va commencer par définir les $n + 1$ sommets principaux :

Soient $s_0 = 0^k$ colorié avec 0, $s_1 = (1, 0, \dots, 0)$ colorié avec 1, $s_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ colorié avec 2, ... , $s_n = (0, \dots, 0, 1)$ colorié avec n .

Les contraintes à imposer à la coloration sont alors :

- Tout point d'une facette contenant s_0 (il y en a k) ne contient pas la couleur du sommet principal manquant.
- Tout point d'une facette ne contenant pas s_0 est étiqueté différemment de 0.
- On procède par récurrence sur la dimension de l'espace ; les projections intermédiaires correspondent à des hypercubes de dimension strictement inférieure.
- l'argument de parité est applicable pendant toute la récurrence : il nous assure la découverte d'un simplexe avec une couleur de plus à ses sommets à chaque étape de la récurrence.

1.3.2 Triangulations de l'hypercube de finesse croissante

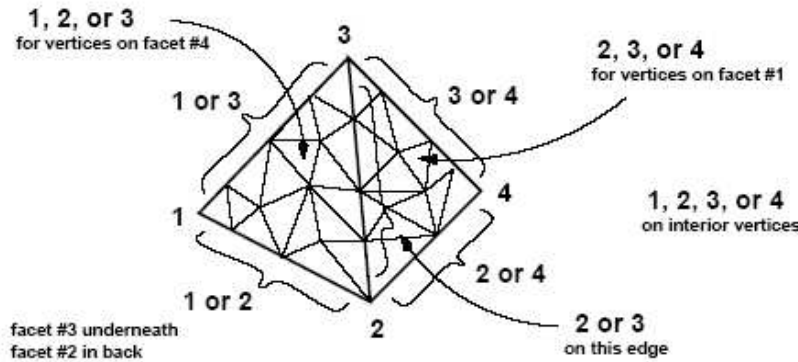


FIG. 1.5 – Contraintes de coloration dans l'espace

1. Définir une “bonne” triangulation de l'hypercube reste difficile :

On a des absences de résultats comme la taille de la plus petite triangulation du cube unité a seulement été calculée jusqu'à la dimension 7, et la taille minimum asymptotique de ces triangulations n'est pas connue.

2. Une solution non optimale :

- On commence par diviser l'hypercube en petits hypercubes : les points extrémaux des petits hypercubes ayant des coordonnées dans $\{0, \frac{1}{k}, \dots, \frac{k-1}{k}, 1\}$
- On remarque que le rajout d'un “point central” peut être étendu au cas d'un l'hypercube : par récurrence sur la dimension, on va décomposer l'hypercube en simplexes de dimension un de moins (issus du sommet supplémentaire) . En triangulant les faces externes (il y en a $2 \times d$), on doit effectuer une triangulation dans la dimension inférieure et donc obtenir une triangulation du petit hypercube. On génère une décomposition de cet hypercube en un nombre (constant à dimension fixée) de simplexes de d points.
- La subdivision initiale assure une finesse arbitraire et la sous-décomposition assure l'aspect triangulation.

On s'aperçoit que l'étiquetage des faces pourrait être plus naturel en excluant chaque couleur sur une seule face externe. Il serait alors intéressant de normaliser la situation en se réduisant à l'enveloppe convexe des points principaux.

1.4 Vision hyper tétraédrique

1.4.1 Contraintes

On va maintenant s'intéresser au cas restreint où l'enveloppe convexe de n points affinement indépendants $v_0, \dots, v_n$ qu'on notera $[v_0, \dots, v_n]$.

Les contraintes de couleurs sont données par l'exemple de la figure 1.5 en dimension 3.

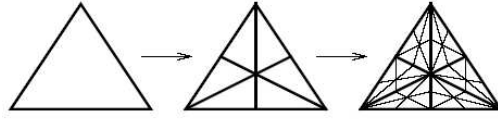


FIG. 1.6 – Subdivision barycentrique itérée dans le cas du triangle

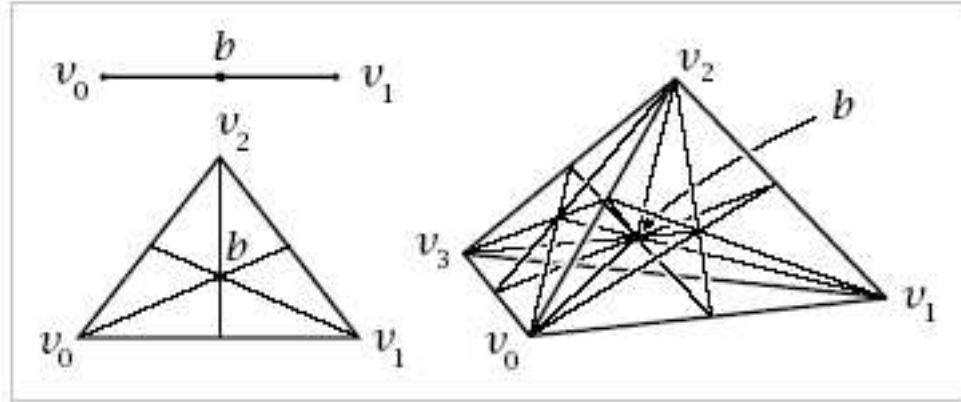


FIG. 1.7 – Subdivision barycentrique en petites dimensions

1.4.2 Subdivision

On va introduire la notion de subdivision barycentrique.

On résume les idées en 2 et 3 dimensions par les figures 1.6.

On introduit le centre de gravité avec $b = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+1} v_i$.

On va alors décomposer $[v_0, \dots, v_n]$ en n -simplexes $(b, w_0, \dots, w_{n-1})$, puis inductivement $(w_0, \dots, w_{n-1})$ est un $(n-1)$ simplexe dans la subdivision barycentrique.

1.5 Difficulté

1.5.1 Quelques classes de complexité

Définition 1 On s'intéresse à des problèmes de recherche d'éléments particuliers.

- La classe FNP est la version non décisionnelle correspondante à NP.
Formellement, on possède une relation $R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ calculable en temps polynomial et polynomialement équilibrée (i.e. $\{(x, y) \in R\} \in P \wedge (x, y) \in R \Rightarrow |y| \leq |x|^k$).
Le problème de recherche associé est : étant donné un $x \in \Sigma^*$, renvoyer si possible $y \in \Sigma^*$ tel que $(x, y) \in R$ ou “non” sinon.
- La classe FP est la version restreinte aux problèmes résolubles en temps polynomial.
- La classe TFNP, comprise entre les deux classes précédentes, est associée aux problèmes de fonctions totales multivaluées, où la vérification est polynomiale en temps.

Remarque : La dualité capture la faculté de reconnaître l'optimalité.

On a alors :

Lemme 1

Tout problème d'optimisation avec dualité est dans TFNP.

Définition 2 On va maintenant s'intéresser à une sous-classe de TFNP :

Un problème A , spécifié par deux algorithmes polynomiaux N et c , est dans la classe PLS si ces polynômes vérifient :

- Pour toute entrée x , l'ensemble des solutions est $S(x) = \Sigma^{p(|x|)}$ où p est un polynôme.
- Pour $s \in S$, on a $N(x, s)$ l'ensemble des voisins de x .
- on doit avoir le coût de la recherche : $c(x, s)$ polynomial en $|N(x, s)|$

Remarque :

- La *totalité* pour les fonctions de PLS se définit comme
“Tout graphe orienté acyclique fini possède un puits”.
Il s'agit donc d'une définition syntaxique (implicite) qui permet de spécifier un graphe de taille exponentielle via une syntaxe polynomiale.
- Il existe une énumération récursive des problèmes dans FNP alors que nous n'en connaissons pas pour TFNP.

Définition 3 (Arguments liés aux parités)

Une autre classe basée sur un lemme théorique de graphes est l'argument de parité :
“Tout graphe fini possède un nombre pair de noeuds de degré impair”.

Un cas particulier appelé l'argument de feuilles impaires est défini par
“Tout graphe, de degré au plus deux possède, un nombre impair de feuilles”.

On peut montrer (via le “chessplayer algorithm”) que les deux classes issues de ces deux définitions coïncident.

Définition 4 (PPA)

On veut à nouveau définir un problème de recherche sur des graphes de taille exponentielle. On dira que le problème A est dans PPA s'il est défini par une machine de Turing déterministe M avec

- x est une entrée pour M*
- L'ensemble des mots de taille $|x|$ est borné par $p(|x|)$ où p est un polynôme.*
- L'espace des configurations $C(x)$ est borné par $\Sigma^{p(|x|)}$.*
- Pour une configuration donnée $c \in C(x)$, M renvoie un ensemble $M(x, c)$ d'au plus deux configurations en temps $O(p(n))$.*

On note $0\dots 0$ la feuille standard (c'est toujours une feuille).

On s'appuie sur l'argument de feuilles impaires.

Le problème de recherche associé à M est :

“ étant donné un x , trouver une feuille de $G(x)$ autre que $0\dots 0$ ” .

1.5.2 PPAD-completude

3D SPERNER est PPDA - complet

Pour la preuve, voir [Pap91].

Chapitre 2

Une première méthode d'approximation

Nous allons maintenant comprendre en quoi le lemme de Sperner peut être associé à l'approximation de point fixe de fonctions continues. L'idée fondatrice de cette méthode va être d'associer, à tout point du simplexe de définition de la fonction, une coloration. Il se trouve que la notion de sous-simplexe complètement étiqueté va pouvoir être mise en relation avec la notion d'approximation de point fixe.

Nous en profiterons donc pour en expliquer les rouages théoriques (primitif, lemme de remplacement...) permettant sa mise en application, ainsi que les limites géométriques et computationnelles de cette approche.

2.1 Point fixe de Brouwer

Théorème 4 (Théorème du point fixe de Brouwer)

Conditions de Brouwer :

*Soit P_n un ensemble de vecteurs $\pi^1, \dots, \pi^n$,
et soit dans le simplexe $S = \{\pi \mid \sum_{i=1}^n \pi_i = 1, \pi_i \geq 0\}$.
Soit f une fonction continue $f : S \rightarrow S$, supposée sous la forme
 $\pi \rightarrow f_1(\pi), \dots, f_n(\pi)$ où les $f_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^n f_i(\pi) = 1$*

Alors : *il existe un $s \in S$ tel que $f(s) = s$.*

2.2 Coloriage associé

Lemme 2

Pour f et π décrits précédemment,

il existe (au moins) un indice i tel que $\pi_i > 0$ et $f_i(\pi) \leq \pi_i$.

⌈ En effet, par l'absurde, si $\forall i, f_i(\pi) \geq \pi_i$ alors
 $\sum_{i=1}^n \pi_i = 1 = \sum_{i=1}^n f_i(\pi)$,
et cette égalité ne peut avoir lieu que si $\forall i, f_i(\pi) = \pi_i$ et π est alors un point fixe.
⌋ ▽

A chaque point π de S on peut associer un indice i (choisi arbitrairement si plusieurs choix sont possibles) tel que $\pi_i > 0$ et $f_i(\pi) \leq \pi_i$.
Soit f continue, et $\epsilon > 0$, et la norme $|x| = \max_i |x_i|$.
Comme S est compact, on peut trouver un $\delta > 0$ tel que qu'on obtienne l'uniforme continuité
(i.e. $|\pi^1 - \pi^2| < \delta \Rightarrow |f(\pi^1) - f(\pi^2)| < \epsilon$).

2.3 Lien Sperner, ϵ -points fixes

Lemme 3

*Si le diamètre maximal des sous-simplices de la partition est δ ,
alors tout point π d'un sous-simplexe complètement étiqueté satisfait
 $|f(\pi) - \pi| < (n-1)(\epsilon + \delta)$.*

⌈

1. Faisons la preuve pour un simplexe $[a, b, c]$ et supposons ce simplexe étiqueté $[1, 2, 3]$. Les contraintes que l'on en déduit sont $f_1(a) \leq a_1$, $f_2(b) \leq b_2$, $f_3(c) \leq c_3$.

Soit x tel que $\sum_{i=1}^3 x_i = 1$; on a :

$$\begin{aligned} f_1(x) - x_1 &= f_1(x) - f_1(a) + f_1(a) - a_1 + a_1 - x_1 \leq \epsilon + 0 + \delta \\ x_1 - f_1(x) &= x_1 - 1 + f_2(x) + f_3(x) \\ &= f_2(x) - f_2(b) + f_2(b) - b_2 + f_3(x) - f_3(c) + f_3(c) - c_3 + (x_1 + b_2 + c_3 - 1) \\ &\leq \epsilon + 0 + \epsilon + 0 + (x_1 + x_2 + x_3 - 1) + b_2 - x_2 + c_3 - x_3 \\ &\leq 2\epsilon + 0 + 2\delta \end{aligned}$$

La situation pour f_2 est symétrique et en prenant le maximum, on a bien

$$|f(x) - x| \leq 2(\epsilon + \delta)$$

2. La première inégalité est exactement la même en dimension quelconque :
La seconde fait intervenir $n-1$ contrôles du type $f_i(x) - f_i(t)$ où $i > 1$ et t un sommet du sous-simplexe complètement étiqueté, tous inférieurs à ϵ , les $f_i(t)$ sont contrôlés via les inégalités dues à la coloration et on conclue en bornant $b - x_2 + c - x_3 + d - x_4 \dots$ par $(n-1)\delta$, d'où un total majoré par $(n-1)(\delta + \epsilon)$

⌋ ▽

2.4 Des simplexes aux compacts convexes

Théorème 5

Un compact convexe $S \subset \mathbb{R}^n$ est topologiquement équivalent à un Δ^m pour un $m \leq n$

Corollaire 1

Soit $g : S \rightarrow \Delta^n$ bicontinue ; posons $h = g(f(g^{-1}(x)))$.

Par Brouwer sur les simplexes, h admet un point fixe x_0 .

On a alors $g^{-1}(x_0)$ qui est un point fixe de f .

Corollaire 2

On peut donc affirmer l'existence d'un point fixe pour des fonctions continues d'un compact convexe quelconque de $\mathbb{R}^n$ dans lui même.

2.5 Algorithme de Scarf et notions linéaires sous-jacentes

Cadre d'étude :

Soit P_k un ensemble de vecteurs $\pi^1, \dots, \pi^n, \dots, \pi^k$
dans un espace de dimension n
où les π_i pour $i > n$ sont choisis dans le simplexe $S = \{\pi | \sum_{i=1}^n \pi_i = 1, \pi_i \geq 0\}$.

Les n premiers vecteurs qui ne sont pas dans le simplexe sont de la forme :
 $\pi^1 = (0, M_1, \dots, M_1), \pi^2 = (M_2, 0, M_2, \dots, M_2), \dots, \pi^n = (M_n, \dots, M_n, 0)$
où les M_i sont tels que $M_1 > M_2 > \dots > M_n > 1$

2.5.1 Primitifs

Définition 5 *Soit P_k comme précédemment.*

Un ensemble de vecteurs $\pi^{j_1}, \dots, \pi^{j_n}$ est un ensemble dit primitif

s'il n'existe aucun vecteur $\pi^j \in P_k$ tel que

$$\pi_1^j > \min(\pi_1^{j_1}, \dots, \pi_1^{j_n}),$$

$\dots, \dots$

$$\pi_n^j > \min(\pi_n^{j_1}, \dots, \pi_n^{j_n})$$

Remarques

1. ensemble primitif $\Rightarrow$ aucun autre point de P_k n'est dans son intérieur.
2. La réciproque n'est pas vérifiée.

Graphe associé à ces primitifs :

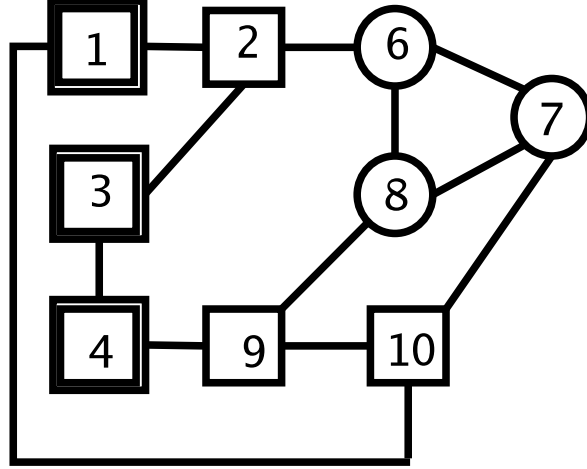


FIG. 2.1 – Adjacence des primitifs de l'exemple

3. Pour $\pi^{j_1}, \dots, \pi^{j_n}$ dans P_k , Posons S' le sous-simplexe de S défini par $\forall i \in [1, n], \pi_i \geq \min(\pi_i^{j_1}, \dots, \pi_i^{j_n})$.
 S' ne contient aucun autre vecteur de $P_k \Leftrightarrow \pi^{j_1}, \dots, \pi^{j_n}$ est primitif.

Exemple :

Soient $\pi^1 = (0; 1.1; 1.1)$, $\pi^2 = (1.2; 0; 1.2)$ et $c = (1.3; 1.3; 0)$ et posons $\pi^4 = (\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$, $\pi^5 = (\frac{1}{9}; \frac{4^+}{9}; \frac{4^+}{9})$, $\pi^6 = (\frac{4^+}{9}; \frac{4^-}{9}; \frac{1}{9})$, $\pi^7 = (\frac{4^-}{9}; \frac{1}{9}; \frac{4^-}{9})$

Résumé des caractéristiques des primitifs :

Numéro	π concernés	min	Aire simplexe
1	π^2, π^3, π^5	$(\frac{4^+}{9}; 0; 0)$	0.85
2	π^3, π^5, π^6	$(\frac{1}{9}; \frac{4^-}{9}; 0)$	0.58
3	π^1, π^3, π^5	$(0; \frac{4^+}{9}; 0)$	0.8
4	π^1, π^2, π^5	$(0; 0; \frac{4^+}{9})$	0.7
5	π^4, π^5, π^6	$(\frac{1}{9}; \frac{1}{3}; \frac{1}{9})$	0.03
6	π^4, π^6, π^7	$(\frac{1}{3}; \frac{1}{9}; \frac{1}{9})$	0.05
7	π^4, π^5, π^7	$(\frac{1}{9}; \frac{1}{9}; \frac{1}{3})$	0.05
8	π^2, π^5, π^7	$(\frac{1}{9}; 0; \frac{4^-}{9})$	0.3
9	π^2, π^6, π^7	$(\frac{4}{9}; 0; \frac{1}{9})$	0.3

Hypothèse de non dégénérescence :

On suppose maintenant que les projections de P_k sur chaque coordonnée sont toujours composées de k valeurs distinctes. (quitte à perturber).

Cette hypothèse nous assure que :

Lemme 4

Un sous-simplexe primitif aura ses n faces bornées parallèlement à un hyperplan (canonique).

Chaque face contient exactement un vecteur de l'ensemble primitif : le vecteur pour lequel la coordonnée correspondante est la plus petite.

Lemme 5

1. *Si un ensemble primitif contient π^i où $i \leq n$ alors le sous-simplexe primitif contient la face de S de i^{eme} coordonnée nulle.*
2. *$\pi_i^{j_1} = \min(\pi_i^{j_1}, \dots, \pi_i^{j_n})$ est équivalent à π^{j_i} est sur la face du simplexe primitif de i^{eme} coordonnée constante.*

On associe tout vecteur de P_k à un entier dans $[1, n]$ avec $i \in [1, n] \Rightarrow \pi^i$ est étiqueté par i ; le reste de l'étiquetage est arbitraire.

Théorème 6 (primitif complet)

Dans les conditions précédentes, on peut assurer qu'il existe un ensemble primitif dont tous les vecteurs sont étiquetés différemment.

Dans les conditions de Brouwer, pour $j > n$, tout π^j est associé à un indice i tel que $f_i(\pi^j) \geq \pi_i^j$.

Un ensemble primitif donné par le théorème (primitif complet) contiendra $\{\pi^l | l \in I_1 \cup I_2\}$ où $I_1 \subset [1, n]$ et $I_2 > n$.

Le sous-simplexe associé à cet ensemble primitif est borné, pour tout i dans I_1 , par l'arête $\pi_i = 0$ ainsi que par une arête passant par chaque vecteur restant dans l'ensemble primitif. Les vecteurs (I_2) restant auront un étiquetage qui exclue I_1 .

D'où pour tout i , il existe un vecteur dans le sous-simplexe pour lequel $f_i(\pi) \geq \pi_i$.

On assure ensuite, par le choix des vecteurs, que le diamètre tend vers 0 (quand $k \rightarrow \infty$) : pour exclure tout vecteur de P_k du sous-simplexe.

Corollaire 3 (Approximation de point fixe)

De cette manière, on peut décrire une suite de sous-simplexes qui converge vers un vecteur unique s .

Par continuité, on a : $\forall i, f_i(s) \geq s_i$ donc s est bien un point fixe.

Théorème 7 (Lemme technique)

Soient $\pi^{j_1}, \dots, \pi^{j_n}$ un ensemble primitif et π^{j_α} l'un d'entre eux. Alors :

*Soit $\exists! \pi^j \in P_k$, $\pi^j \neq \pi^{j_\alpha}$ tel que
 $\pi^{j_1}, \dots, \pi^{j_{\alpha-1}}, \pi^j, \pi^{j_{\alpha+1}}, \dots, \pi^{j_n}$ est primitif*

*Soit $\forall i \in [1, n] \setminus \{\alpha\}$, les π^{j_i} sont parmi les n premiers vecteurs de P_k
(et on ne peut obtenir de primitif par remplacement)*

Quelques idées pour la preuve :

- On suppose $\pi_i^{j_i} = \min(\pi_i^{j_1}, \dots, \pi_i^{j_n})$.
 π^{j_i} est la face du sous-simplexe pour laquelle la i^{ieme} coordonnée est constante.
- Supposons que π^{j_1} va être sorti.
- Posons $\pi^{j_i^*}$ le vecteur de l'ensemble primitif de seconde plus petite valeur de première coordonnée.
- $j_i^* > n$ sauf dans le cas spécial (2^{ieme} "soit" du Lemme).
- Pour trouver le remplaceant de π^{j_1} , on déplace la face contenant $\pi^{j_i^*}$, parallèlement à cette face, en faisant décroître la i^{ieme} coordonnée jusqu'à 1 ou 2 :
 1. Un vecteur $\pi^j \in P_k$ avec $\forall i \neq 1, \pi_i^j > \pi_i^{j_1}$ et $\pi_1^j > \pi_1^{j_i^*}$
 2. Arriver sur la face de S où $\pi_i^* = 0$.
- La règle est applicable (sauf quand $\forall i \neq 1$, les π^{j_i} sont choisis parmi les n premiers éléments de P_k).
- Si $\pi^l, \pi^{j_2}, \dots, \pi^{j_n}$ est primitif avec $\pi \neq \pi^{j_1}$, alors
 π^l doit être sur la face du nouveau sous-simplexe de i^{ieme} coordonnée constante,
et
 $\pi^{j_i^*}$ doit être sur la face de 1^{iere} coordonnée constante
- par l'absurde, on contredit facilement la primitivité si on n'a pas $\pi_1^l = \pi_1^{j_1}$ et l'hypothèse de non dégénérescence nous assure alors que $l = j_1$ d'où l'unicité du remplacement de j_1 qui est donc trouvé comme proposé.
- Le cas spécial n'est pas sujet au remplacement : comme précédemment, on retomberait sur deux vecteurs avec une coordonnée constante (donc commune) ce qui contredit la non-dégénérescence.

2.5.2 Mise en pratique algorithmique de l'approximation

Chaque élément de P_k est étiqueté par un entier dans $[1, n]$ et pour $j \leq n$, π^j est étiqueté par j .

On veut un ensemble primitif dont tous les membres sont indexés différemment sauf peut être deux vecteurs.

Considérons l'ensemble $\pi^2, \dots, \pi^n, \pi^{j^*}$ où π^{j^*} est choisi parmi les éléments plus grands que n avec le critère de maximiser la première coordonnée.

Lemme 6 *Le remplacement revient à trouver l'unique vecteur (entrant) a et un indice i vérifiant*

- $\forall \pi^j \in P_k, \forall i \neq i^*, \pi_i^j > a_i$
- $\pi_{i^*}^{j^*}$ est maximal.

Lemme 7 *Dans ce cas, $\min(\pi_i^{j^*}, \pi^2, \dots, \pi^n)$ peut prendre deux valeurs :*

0 pour $i > 1$

$\pi_i^{j^}$ pour $i = 1$*

Si le vecteur π^{j^} était associé à la couleur 1, on aurait résolu le problème puisque tous les membres de l'ensemble primitif seraient indexés différemment.*

Dans le cas contraire, π^{j^} partage sa couleur avec (exactement) un autre des vecteurs $\pi^2, \dots, \pi^n$.*

Notre algorithme ne sera utilisé qu'avec des ensembles primitifs la forme ci dessus. A chaque étape, l'ensemble primitif vérifie :

1. 1 n'est associé à aucun vecteur
2. Tout vecteur de l'ensemble primitif est indexé différemment excepté pour une paire de vecteurs de même couleur.

L'algorithme prend un des deux vecteurs de même couleur et le retire (remplacement en fait) de l'ensemble primitif. On a alors soit un nouvel ensemble primitif avec les mêmes propriétés, soit une solution.

Hors de l'ensemble primitif initial, un des deux vecteurs (de même couleur) vient d'être introduit. On sort donc l'autre.

On a donc à faire à un parcours de graphe où les sommets sont de degrés ≤ 2 . on ne revient jamais sur un sommet déjà visité et L'algorithme ne peut s'arrêter que lorsqu'un ensemble primitif complètement étiqueté à été trouvé. Le nombre fini d'ensembles primitifs allié à l'argument de parité nous assure la terminaison de l'algorithme (dans un bon ensemble).

2.5.3 Optimisation pour une subdivision particulière

Scarf a remarqué qu'on pouvait améliorer la recherche du vecteur entrant, pour une subdivision particulière, sans parcourir P_k tout entier. Soit $D \in \mathbb{N}$

Soit $P_k = \{\frac{k_1}{D}, \dots, \frac{k_n}{D}\}$ où $k_i \in \mathbb{N}$ et $\sum_{i=1}^n k_i = D$.

Chaque a_i est un entier divisant D , et le vecteur entrant est alors

1. Soit dans $\pi^1, \dots, \pi^n$
2. Soit $i \neq i^* \Rightarrow \pi_i^j = a_i + \frac{1}{D}$ et $\pi_{i^*}^j = 1 - \sum_{i \neq i^*} (a_i + \frac{1}{D})$

Conflits :

Pour résoudre les conflits de dégénérescence, à chaque étape on construit :

$$\begin{pmatrix} 0 & M_2 & \dots & 0 & \pi_1^{j_1} & \dots & \pi_1^l \\ M_1 & 0 & \dots & 0 & \pi_2^{j_1} & \dots & \pi_2^l \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_1 & M_2 & \dots & 0 & \pi_n^{j_1} & \dots & \pi_n^l \end{pmatrix}$$

où les n premières colonnes correspondent aux n premiers vecteurs de P_k et les suivantes aux points introduits pour former un primitif.

Le nombre de vecteurs à examiner pour trouver le vecteur rentrant est alors majoré par le nombre d'itération $+ n$.

Condition suffisante d'unicité du point fixe atteint :

Supposons les f_i linéaires dans un voisinage du sous-simplexe.

Soit t le point qui minimise $\max(f_1(\pi) - \pi_1, \dots, f_n(\pi) - \pi_n)$.

Alors t est l'unique point fixe de f .

2.5.4 Performances

En optimisant la recherche de i^* , par une matrice (avec du tri sous-jacent), Herbert Scarf dans [SCA67] a rendu effectif la question d'approximation de points fixes pour les fonctions dans des espaces de dimensions de l'ordre de 20.

Exemples du nombre de primitifs pour la subdivision particulière complète

Somme des coordonnées	Nombre de vecteurs	Nombre de primitifs
5	24	60
10	69	468
15	139	972
20	234	1428
30	499	2448
40	864	3360
50	1329	4404
100	5154	9540

Exemples du nombre de primitifs (subdivision de Scarf aléatoire)

Somme des coordonnées	Nombre de vecteurs tirés	Nombre de primitifs
10	5	42
10	10	210
10	15	480
10	20	774
20	20	306
20	40	2274
30	10	102
30	20	318
30	30	486
30	60	3000
40	10	54
40	40	1002
40	100	4794
50	10	54
50	50	1608
1000	20	84
1000	50	408
1000	100	966

2.6 Extension : Bases faisables.

Soient $\pi^1 = (0, M_1, \dots, M_1)$, $\pi^2 = (M_2, 0, M_2, \dots, M_2)$, ..., $\pi^n = (M_n, \dots, M_n, 0)$
avec $M_1 > M_2 > \dots > M_n > 1$;
soient $\pi^{n+1}, \dots, \pi^k$ dans le simplexe ;
soit A la matrice $n \times k$ de la forme ;

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a_{1,n+1} & \dots & a_{1,k} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_{2,n+1} & \dots & a_{2,k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n,n+1} & \dots & a_{n,k} \end{pmatrix}$$

et b un vecteur strictement positif.

On s'intéresse au système d'équation $Ax = b$.

Définition 6

On appelle base faisable de ce système toute famille de n colonnes $j_1, \dots, j_n$ linéairement indépendantes telles que $\forall i$, les équations :

$$\sum_{\alpha} a_{i,j_{\alpha}} b_{j_{\alpha}} = b_i$$

ont des solutions positives.

Théorème 8 (Bases faisables)

Si toutes les solutions positives de $Ax = b$ forment un ensemble borné

*Alors il existe un ensemble primitif $\pi^{j_1}, \dots, \pi^{j_n}$ tel que
 $(j_1, \dots, j_n)$ est une base faisable*

Pour la preuve, voir [Sca67].

Chapitre 3

Discussion et perspectives

Nous avons présenté une méthode d'approximation des points fixes de fonctions continues sur un simplexe.

La difficulté centrale s'est articulée autour de la notion de parité, et à la dureté du lemme de Sperner généralisé. Elle nous a quand même permis de fournir un algorithme déterministe, potentiellement exponentiel en temps, mais a laissé un certain nombre de questions ouvertes :

- La dureté du lemme de Sperner apparaît clairement en dimension 3. Cependant on connaît encore peu de choses sur sa complexité dans le cas de la dimension 2. Son étude est active et pourrait mener à d'éventuelles optimisations dans le cas plan.
- L'étape de décomposition du simplexe que la généralisation de Sperner propose n'est pas optimale. Il serait intéressant de se consacrer à l'étude des triangulations optimales (du point de vue diamètre) du simplexe en dimension quelconque, afin d'optimiser la taille de la structure dans laquelle se déroule la marche de découverte de sa sous-structure satisfaisante. Ces questions, ayant leur intérêt propre, mériteraient les bienfaits d'une randomisation astucieuse géométrique que nous n'avons pas réussi à imposer au modèle.
- Il a été montré que l'algorithme d'approximation peut suivre un chemin exponentiellement long avant de découvrir une sous-structure satisfaisante. Néanmoins, rien n'est dit sur la densité de ces instances, et il n'est pas exclu qu'un gain de complexité soit obtenu, au moins pour des cas restreints, dans le cadre d'une analyse en moyenne.

Chapitre 4

Bibliographie

- [JPTM02] Juan Pablo, Torres-Martinez, 2002 :
Fixed Points Theorems via Nash Equilibria.
- [MC02] Michel Coste, Octobre 2002 :
An Introduction to Semialgebraic Geometry.
- [Pap91] Christos H. Papadimitriou, 1991 :
On the Complexity of Parity Argument
and Other Inefficient Proofs of Existence.
Journal of Computer and System Sciences, 1994, p 498-532.
- [RVV03] Rakesh V. Vohra, Fall 2003 :
Feasibility, Optimality and Fixed Points
- [Sca67] Herbert Scarf :
SIAM J.Appl Math vol 15, n5, 1967, p 1328-1343
The Approximation of Fixed Point of a Continuous Mapping.
- [Zhao02] Jingang Zhao, Fevrier 2002 :
The Equivalence between Four Economic Theorems and
Brouwer Fixed Point Theorem

Deuxième partie

EQUILIBRE D'ARROW DEBREU

Equilibre d'Arrow-Debreu

Le problème des équilibres compétitifs d'Arrow-Debreu a tout d'abord été formulé par Leon Walras en 1874. Dans ce problème, une population de n joueurs a une dotation initiale de marchandise divisible et une fonction d'utilité pour consommer toutes les marchandises. Chaque joueur vend l'ensemble de sa dotation initiale et utilise le revenu pour acheter un panier de marchandise tel que sa fonction d'utilité est maximisée. Walras demandait s'il existait des prix tels que cette situation d'optimalité soit atteinte pour tous les joueurs.

L'idée essentielle est alors “market clears”, qui correspond intuitivement à “tout est vendu et tout est dépensé”.

Une réponse non constructive a été donnée par Arrow et Debreu en 1954 qui assure qu'un tel équilibre existe quand les fonctions d'utilité sont concaves.

De nombreux modèles et versions de ces problèmes existent ; un cas particulier est celui dit de type “producteurs-consommateurs” ou “modèle de Fisher” dans lesquels les consommateurs ont de l'argent pour acheter des marchandises. Des prix en équilibre sont une affectation des prix telle que

- Tout consommateur achète un panier de marchandise qui maximise son utilité
- Le marché est net : tout l'argent est dépensé et toutes les marchandises sont vendues.

C'est bien sur un cas particulier du problème de Walras que l'on peut trouver dans la littérature économique avec une grande diversité de notions supplémentaires : firmes regroupant les producteurs de marchandises, intérêt technologique et autres variantes.

Historiquement, l'existence des équilibres d'Arrow Debreu une conséquence du “Point fixe de Brouwer”. Le cas des fonctions d'utilité récursives fournit une trop grande expressivité. Richter et Wong ont en effet montré que ces équilibres ne sont pas calculables dans un sens particulier : des utilités récursives peuvent générer des équilibres non récursif. Une des particularités positives du cadre des fonctions continues : les outils de Scarf peuvent y être appliqués pour l'approximation du calcul des prix en équilibre.

Des techniques algorithmiques ont été développées dans le modèle “producteurs-consommateurs” avec utilités linéaires en 2002. Elle montrent que cette restriction rend le calcul de prix en équilibre exact et polynomial !

Des recherches sont menées pour étendre ces résultats à d'autres types d'utilités ; un résultat récent [BV04] propose une approximation polynomiale dans un cadre plus général que les utilités linéaires : les utilités CES, comprenant les fonctions d'utilités scalaires différentiables.

Résumé de la partie

Le premier chapitre est consacré à la description du modèle “producteurs-consommateurs” avec utilité linéaire qui nous fournit un cadre de calcul exact et polynomial de prix en équilibre. L'idée est de commencer par fixer des prix tels que tout soit vendu,

quitte à ce que les consommateurs conservent de l'argent, et de les augmenter en maintenant le fait que tout soit vendu, jusqu'à ce que tout soit dépensé.

L'originalité de cette vision est la manipulation astucieuse du sous-graphe égalité dont la structure permet d'assurer la découverte d'une nouvelle affectation de prix faisable au sens "tout est vendu", à l'aide de calculs de flots.

Cette nouvelle affectation est meilleure (moins de surplus d'argent pour les consommateurs), d'un facteur qui ne dépend que de la matrice d'utilité des consommateurs. On en déduira une analyse polynomiale et exacte de l'algorithme permettant de fixer les prix et les affectations de marchandises dans ce modèle de "producteurs-consommateurs" avec utilité linéaire.

Le chapitre suivant se situe dans un cadre plus général que celui des "producteurs-consommateurs", le cadre des marchés d'échanges; comme proposés par Walras.

Nous l'utiliserons dans le cas particulier des utilités CES, ces fonctions particulières qui permettent d'exprimer par exemple, à l'aide d'une matrice "nombre de consommateurs" $\times$ "nombre de marchandises" que l'utilité de consommateur i est restreint par le minimum du vecteur panier reçu divisé terme à terme par la ligne i de la matrice.

Ces fonctions CES constituent un cadre dans lequel se généralisent les techniques développées pour les utilités linéaires. On fera quelques liens reliant l'optimalité des prix à la programmation convexe. Une solution d'approximation sera induite par l'ellipsoïde algorithme. Malgré des performances pratiques limitées, cet algorithme est polynomial; nous en déduirons donc un algorithme polynomial d'approximation des prix en équilibres dans le cadre "Walras" avec utilités CES.

Dans le dernier chapitre, on adopte à nouveau une formalisation "à la Walras" du problème d'Equilibre d'Arrow Debreu. On y découvre comment l'existence de l'équilibre dans ce cas peut être vu comme un point fixe d'une fonction continue appropriée.

On pourra alors appliquer les résultats précédents de l'approximation de Brouwer, et donc obtenir une approximation du calcul des équilibres d'Arrow-Debreu pour les utilités fortement non linéaires proposées par Scarf.

Chapitre 5

Calcul polynomial des équilibres d'Arrow Debreu avec utilités linéaires

Nous sommes dans le cadre “producteurs-consommateurs” de [DPW03]. On a un ensemble de marchandises divisibles A , et un ensemble de consommateurs B . Chaque consommateur possède un crédit initial qu’il va utiliser pour acheter des marchandises.

Les utilités sont données par la matrice U : pour le consommateur i , son utilité est donnée par la i^{ieme} ligne de U à laquelle on applique le produit scalaire avec son panier reçu.

Le but est de trouver des prix en équilibre, c’est-à-dire une situation dans laquelle :

- Tout est dépensé : cela va se traduire par un flot maximum entre la source et le puits du sous-graphe égalité, qui aura comme valeur la somme des crédits initiaux.
- Tout est vendu : cela va se traduire par un flot maximum entre la source et le puits du sous-graphe égalité qui aura comme valeur la somme des prix des marchandises.
- Tous les consommateurs maximisent leur utilité : cela est contenu dans le fait que le flot qui transite dans le graphe égalité vers le consommateur i l’est parce qu’il maximise le rendement unitaire de i et maximise donc son utilité.

Nous allons donc formaliser ces notions de préférences à prix fixés décrites par l’idée de sous-graphe égalité, et comprendre pourquoi il est suffisant de regarder un nombre polynomial de tels sous-graphes égalité pour décider de prix en équilibre.

5.1 Premiers liens avec les flots

Définition 7 (Bang per buck) *Les agents achètent des marchandises dans le but de maximiser leur rendement unitaire défini par :*

$$BpB(i) = \frac{U_{i,j}}{P_j}.$$

Le meilleur rendement possible pour l’agent i est $\alpha_i = \max_{j \in A} \frac{U_{i,j}}{P_j}$

Définition 8 (Sous-graphe égalité) *On appelle sous-graphe égalité le graphe (bi-parti) $G = (A, B, E)$ dans lequel*

$$((i, j) \in E) \Leftrightarrow (\alpha_i = \frac{U_{i,j}}{P_j})$$

Lemme 8

*Pour un vecteur de prix fixé :
On peut déterminer quand les prix nettoient le marché
en effectuant un calcul de flots*

[On ajoute

- une source s et un puits t au sous graphe égalité
- des arêtes $s \rightarrow j$ où $j \in A$, et de capacité p_j
- des arêtes $i \rightarrow t$ où $i \in B$, et de capacité m_i
- des arêtes $j \rightarrow i$ où $j \in A, i \in B$ et de capacité ∞

On a alors un flot représentant un transfert d'argent ; où une unité passe par $j \rightarrow i$ est équivalente à une unité dépensée par j pour i . Il est alors clair que

Le marché est net $\Leftrightarrow$ Le flot max vaut $\sum m_i$

[∇

On va décrire un algorithme qui commence avec des petits prix et les augmente progressivement en conservant deux invariants :

I1 Tout est vendu (quitte à ce que les acheteurs conservent un surplus)

I2 $\{s\}$ est une $s - t$ coupe minimale

But Trouver des prix tels que $V - \{t\}$ soit aussi une $s - t$ coupe minimale.

En effet, la seconde coupe correspond aux dépenses et l'égalité des valeurs de flots assure (par le dernier encadré) que le marché est net.

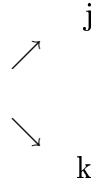
On va augmenter les prix pour faire tendre les surplus vers 0.

5.2 Initialisation des prix

- Pour I2, on commence à fixer, $\forall j \in A, p_j = \frac{1}{n}$
- Pour I1, si j n'a pas d'acheteur, on calcule $\forall i \alpha_i = \max_{j \in A} \frac{U_{i,j}}{p_j}$
On fait ensuite $p_j \leftarrow \max_{i \in B} \frac{U_{i,j}}{\alpha_i}$

5.3 Augmentation des prix

On va faire baisser les surplus (en maintenant les arêtes du sous-graphe égalité G).

Si dans G on a i  j
 k alors $\frac{U_{i,j}}{p_i} = \frac{U_{i,k}}{p_k}$ et donc le facteur $\frac{p_k}{p_j} = \frac{U_{i,k}}{U_{i,j}}$ est inchangé

par une multiplication des prix par un facteur constant.

On va donc multiplier tous les prix par un facteur x , et considérer les évènements suivants

Evènement de type 1 : on viole I_2

- Cet évènement arrive lorsqu'une autre $s - t$ coupe minimale apparaît.
Il crée un scénario idéal pour un acheteur.
- G réduit à cette nouvelle coupe possède un marché net
- On gèle alors cette partie de G .

On a donc dans G des sommets actifs et des sommets gelés

Evènement de type 2 :

Il apparaît une nouvelle arête dans G d'un acheteur actif à un bien gelé : on dégèle la composante du bien gelé.

Outils et notations

Pour $S \subset A$, on note $\Gamma(S) = \{i \in B \mid \exists j \in S : (i, j) \in E\}$.

On notera, pour $A' \subset A$ (resp. $B' \subset B$) $p(A') = \sum_{j \in A'} p_j$ (resp. $m(B') = \sum_{i \in B'} m_i$).

Lemme 9

$$I_2 \Leftrightarrow (\forall S \in A, p(S) \leq m(\Gamma(S)))$$

Supposons que multiplier les prix par x^* provoque une autre coupe minimale.
 $\forall x > x^*$, multiplier les prix par x implique violer I_2 , par le lemme précédent, $\exists S \subset A$ tel que $x^* p(S) = m(\Gamma(S))$.

On appellera un ensemble S qui vérifie cette égalité un *ensemble tendu*

Déterminer l'arrivée des évènements

Lemme 10

La valeur pour laquelle un évènement de type 1 arrive peut être déterminée avec n calculs de flots max

[Pour A et B actifs, on veut déterminer $x^* = \min_{\emptyset \neq S \subset A} \frac{m(\Gamma(S))}{p(S)}$ (atteint pour S^*).

En commençant avec $x = \frac{m(B)}{p(A)} \geq x^*$, on calcul le flot max pour des prix multipliés par x . Deux cas peuvent alors se produire :

- Soit $\{s\}$ est une coupe min, et on a alors $x^* = x$
- Soit $\{s\} \cup A_1 \cup B_1$ est une coupe min, et on peut alors recommencer avec $(A_1, \Gamma(A_1))$

[∇

Corollaire 4 *On peut déterminer le cas 1 en n calculs de flots max*

[Chaque entrée dans le cas 2 précédent provoque la sortie d'un acheteur de l'ensemble A' considéré.

[∇

Lemme 11

*Pour S tendu, $j \in S$, et $u = \max_{i,j} U_{i,j}$,
dénominateur(p_j) $\leq n u^n = \Delta$*

5.4 Un algorithme

Initialisation des prix ;
 $(F, F') \leftarrow (\emptyset, \emptyset)$ (graphe gelé) ;
 $(H, H') \leftarrow (A, B)$ (graphe actif) ;
Tant que $H \neq \emptyset$
{
augmenter les prix : $\forall j \in H, p_j \leftarrow p_j x$ jusqu' à ce que
1 : S devienne tendu
Passer $(S, \Gamma(n))$ de H, H' à (F, F')
Retirer les sommets passer $(S, \Gamma(n))$ de H, H' à (F, F')
2 : Pour $i \in H', j \in F, \alpha_i = \frac{U_{i,j}}{p_j}$
Ajouter (i,j) à E .
Passer la composante connexe contenant j de F, F' à H, H'
}
Retourner $(p_j)_{j \in A}$

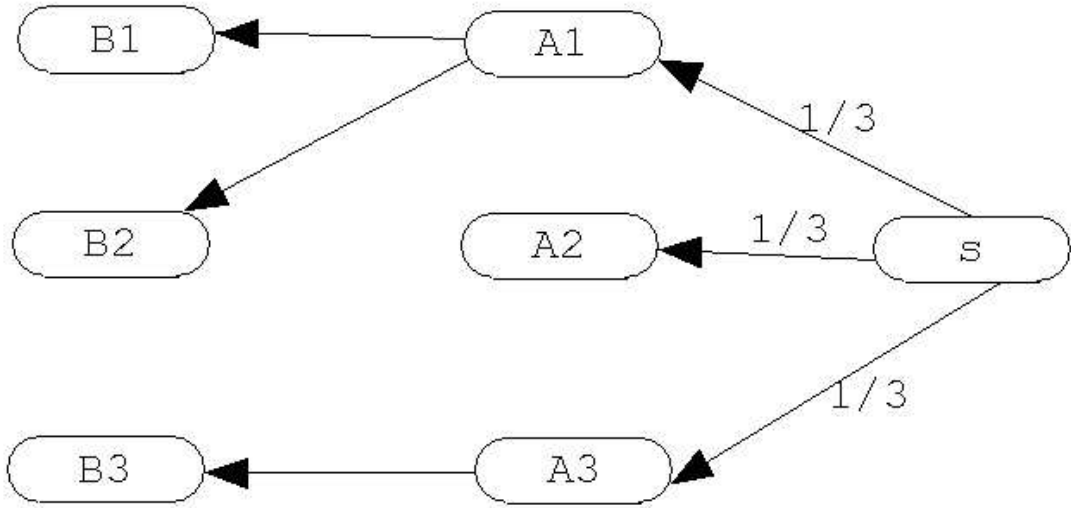


FIG. 5.1 – Première étape de l'initialisation

5.4.1 Exemple

Supposons que les utilités soient données par

$$\begin{pmatrix} 10 & 5 & 2 \\ 15 & 10 & 5 \\ 5 & 4 & 20 \end{pmatrix}$$

et les capitaux initiaux par $(100, 200, 100)$

Initialisation des prix

Tous les prix sont initialement fixés à $\frac{1}{3}$ la figure 5.1 :

Comme la marchandise A_2 n'a pas d'acheteur, on modifie son prix :

$$\alpha_1 = \max_{j=1}^3 \frac{U_{1,j}}{p_j} = \max(10 \times 3, 5 \times 3, 2 \times 3) = 30,$$

$$\alpha_2 = \max_{j=1}^3 \frac{U_{2,j}}{p_j} = 45, \alpha_3 = \max_{j=1}^3 \frac{U_{3,j}}{p_j} = 60$$

$$\text{On fait alors } p_2 \leftarrow \max_{i=1}^3 \frac{U_{i,2}}{\alpha_i} = \max\left(\frac{5}{30}, \frac{10}{45}, \frac{4}{60}\right) = \frac{2}{9}$$

On obtient alors la figure 5.2

Première augmentation des prix

Pour $A = \{A_1, A_2, A_3\}$ et $B = \{B_1, B_2, B_3\}$, calculons $\frac{m(B)}{p(A)} = \frac{400}{\frac{8}{9}} = 450$.

En multipliant tous les prix par 450, on obtient la figure 5.3

Le flot obtenu est $100 + 100 + 1550 = 350$ et une coupe mettant de côté A_3 et B_3 a cette même valeur : on va se restreindre alors à la figure 5.4.

Pour $A = \{A_1, A_2\}$ et $B = \{B_1, B_2\}$, on calcule à nouveau $\frac{m(B)}{p(A)} = 540$.

En multipliant tous les prix par 540, on obtient la figure 5.5

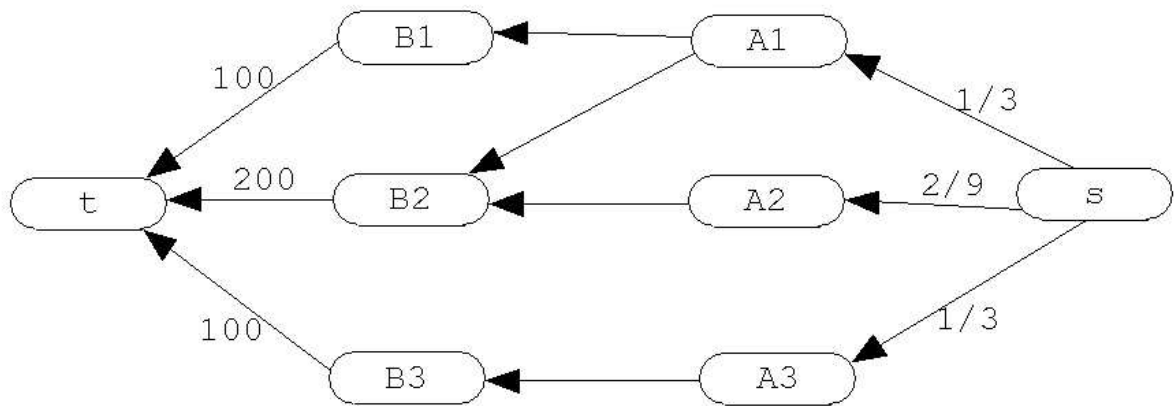


FIG. 5.2 – fin de l'initialisation des prix

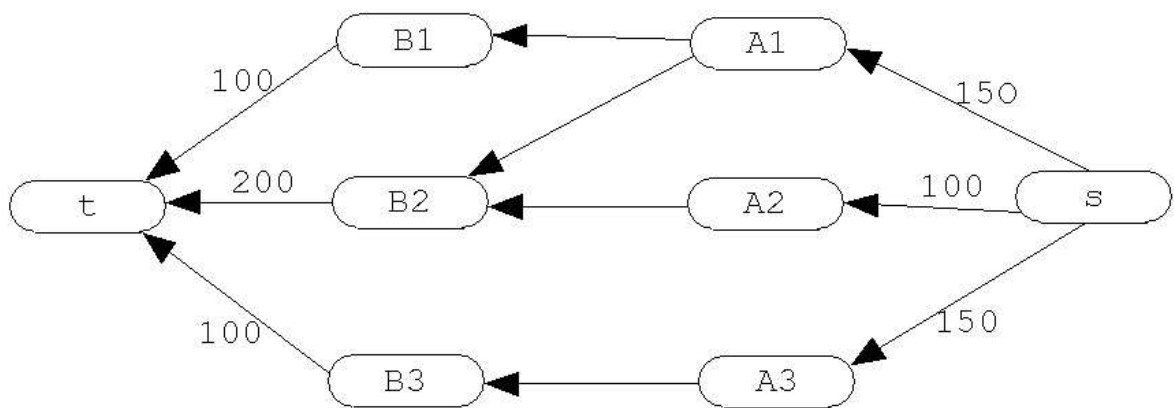


FIG. 5.3 – Premier calcul de flot

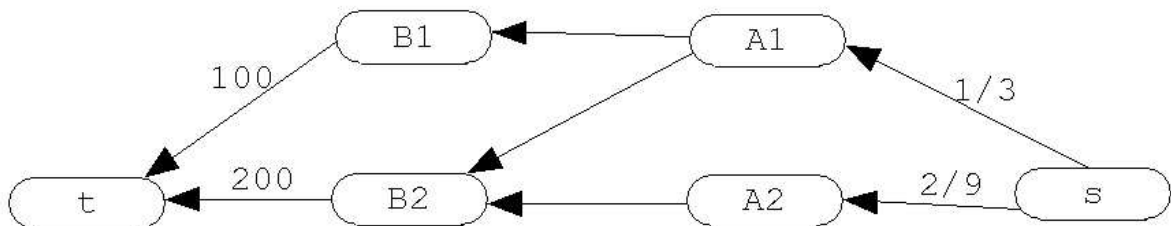


FIG. 5.4 – Second calcul de flot

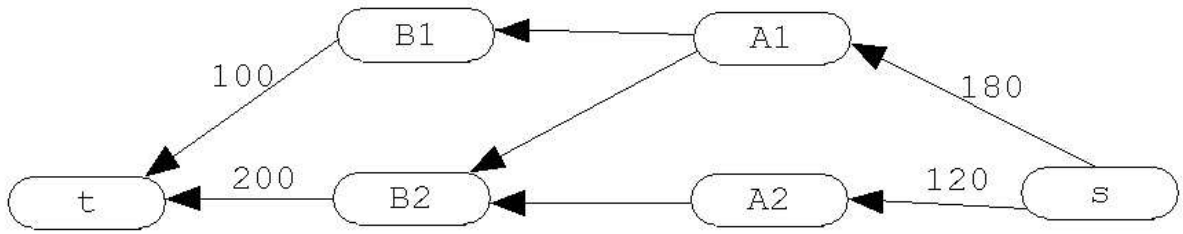


FIG. 5.5 – Fin de la première étape

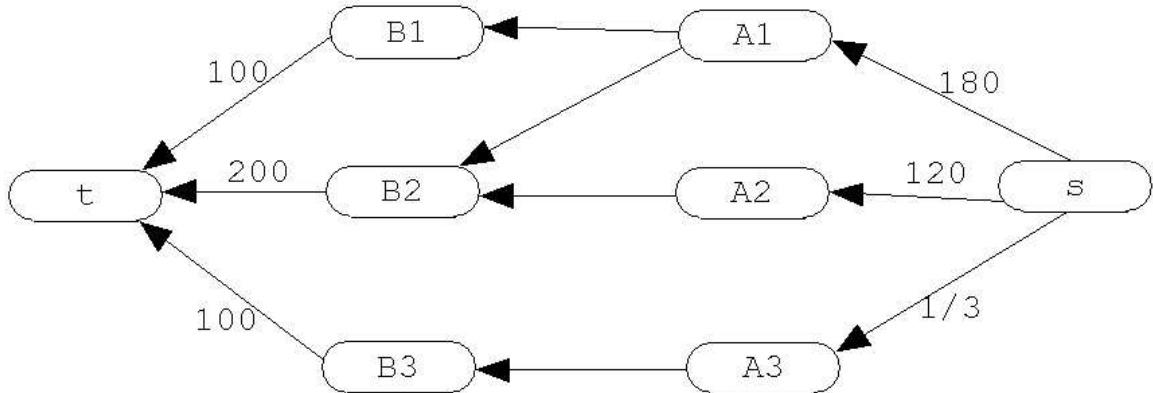


FIG. 5.6 – Premiers Sommets gelés

Le flot calculé est alors de 300 et on est dans les conditions pour geler A_1, A_2, B_1 et B_2 et obtenir la figure 5.5

Evènements de type 2

Vérifions quand les évènements de type 2 arrivent :

Une arête apparait de B_3 à A_1 pour $\frac{60}{x_2} = \frac{1}{30}$ ou pour $\frac{60}{x_2} = \frac{1}{36}$ d'où $x_2 = 1800$ et ce n'est pas l'évènement qui va apparaître en premier. En effet...

Deuxième augmentation des prix

Pour $A = \{A_3\}$ et $B = \{B_3\}$, $\frac{m(B)}{p(A)} = 300$.

Le graphe obtenu est celui de la figure 5.6 et on est dans le cas d'arrêt de l'algorithme : les prix fixés alors ($p_1 = 180, p_2 = 120, p_3 = 100$) correspondent aux spécifications recherchées

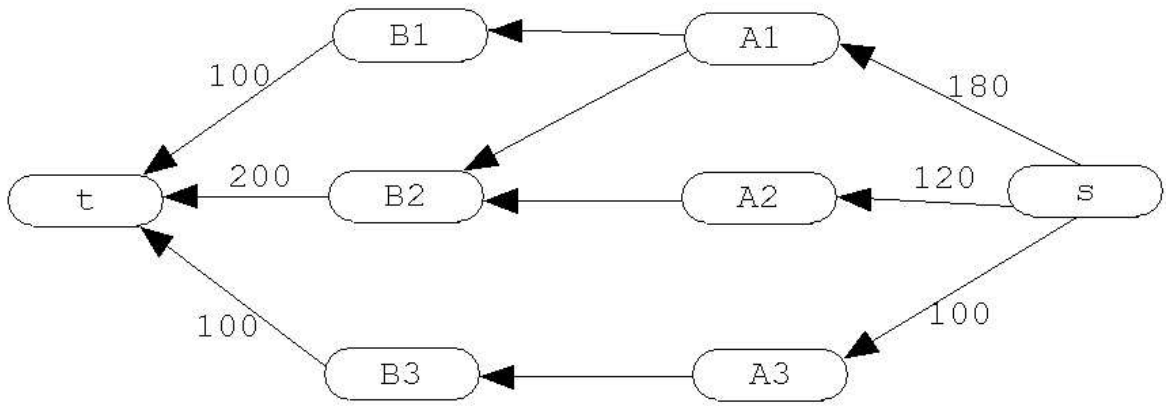


FIG. 5.7 – Les prix optimaux

5.5 Vers une approximation polynomiale

Soit $\epsilon > 0$

1. $\forall S \subset H, m(\Gamma(s)) \leq p(S) + \epsilon$
2. $\forall S$ ajouté la partie gelée du graphe : $m(\Gamma(s)) \leq p(S) + |S|\epsilon$

On remarque que

1. Quand un évènement de type 1 arrive, le flot total a augmenté de ϵ
2. Quand l'algorithme termine, le surplus est inférieur à $n\epsilon$
3. En commençant à $\epsilon = \frac{m(B)}{2}$
4. Après i exécutions, le surplus est donc inférieur à $\frac{m(B)}{2^i}$
5. Après $O(\log(m(B)\Delta^2))$ itérations, le surplus est inférieur à $\frac{1}{\Delta^2}$
6. Enfin, après ces opérations ...

Théorème 9

L'algorithme de nettoyage du marché tourne en temps $O(m(B).\Delta^2.n^2.M_f)$ où M_f désigne le temps de calcul d'un flot max.

[Pour une preuve plus détaillée, voir [DPW03].

▮

Chapitre 6

Extension polynomiale : Utilités de Leontief

Nous sommes maintenant dans le cadre où nous avons n types de marchandises et m acteurs. Nous adoptons une formalisation “à la Walras” : l’acteur i possède une dotation initiale e_i (une coordonnée par marchandise), et une fonction d’utilité $u_i = (a_{1,i}, \dots, a_{n,i})$, qui compose une colonne de la $n \times m$ matrice A .

Les idées de ce chapitre, principalement inspirées de [BCKV04], visent à réduire le problème de prix en équilibre à un problème d’optimisation assistée par la programmation convexe.

On sera amené à justifier cette orientation d’approximation en dévoilant qu’un exemple simple peut conduire à des prix optimaux et paniers recus irrationnels.

Il se trouve que la notion d’ensemble tendu du sous-graphe égalité développée dans le cas des utilités linéaires se généralise dans le cas des fonctions CES et des fonctions scalaires différentiables. On obtient alors une extension polynomiale pour l’approximation de prix en équilibre d’Arrow-Debreu dans une formalisation plus générale que la version “producteurs-consommateurs” précédente, et avec une famille d’utilités, dites de Leontief plus générale que les utilités linéaires.

6.1 Le problème CP

On pose $q = (q_1, \dots, q_n)$ où q_j est la quantité initiale de la marchandise j , et $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_m)$ qui s’interprète comme un vecteur de prix :

Définition 9 (Le problème CP)

Maximiser $(\pi_1^{e_1} * \pi_2^{e_2} * \dots * \pi_m^{e_m})^{\frac{1}{\sum_i e_i}}$

Sous les conditions :

$$\forall 1 \leq j \leq n, \quad \sum_{1 \leq i \leq m} a_{j,i} \pi_i \leq q_j$$

$$\text{et } \forall 1 \leq i \leq m, \quad \pi_i \geq 0$$

Remarque : On peut réécrire la première condition comme $A\pi \leq q$.

Chaque marchandise (j) est associée à la contrainte $\sum_{i=1}^m a_{j,i} \pi_i \leq q_j$.
Posons $G^t = \{j | \sum_{i=1}^m a_{j,i} \pi_i = q_j\}$ qui est le sous-ensemble des marchandises tendues pour π ; et posons G^t les marchandises restantes.

Proposition : Soit j une marchandise quelconque de G^t , alors on peut lui associer un $\gamma_j \geq 0$ tel que
 $\forall 1 \leq i \leq m, \sum_{j \in G^t} \gamma_j \pi_j a_{j,i} = e_i$.

Remarque : C'est la même chose que le théorème d'existence de point stationnaire nécessairement optimal de Kuhn et Trucker.

6.1.1 Exemple

Supposons que le panier reçu $x_i = (x_{1,i}, \dots, x_{n,i})$ lui procure le contentement $u_i(x_i) = \min_{1 \leq j \leq n} \frac{x_{j,i}}{a_{j,i}}$.
On rappelle que l'on parlera d'un prix π en équilibre (pour x_i le panier de l'acteur i) si

- Bonheurs optimaux : $\forall i, x_i$ maximise $u_i(y_i)$ sous la contrainte $\pi^T y_i \leq e_i$
 - Marché net : $\forall j, \sum_{i=1}^m x_{j,i} = q_j$
- Dans notre exemple d'utilité, on a $u_i(x_i) = \frac{e_i}{\pi^T a_i}$ et $\pi^T x_i = e_i$.

Théorème 10 (Optimalité dans ce cas particulier)

*Pour des a_i, e_i, q_j comme précédemment, π et x_i en équilibre.
Soit $\beta_i = \min_{1 \leq j \leq n} \frac{x_{j,i}}{a_{j,i}}$ l'utilité à l'équilibre
Alors $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)$ est une solution optimale au problème CP.*

6.2 Le problème FEAS

Nous allons proposer une version du problème sous forme de contraintes convexes.

Définition 10 (Le problème FEAS)

Le but est de trouver $\beta_1, \dots, \beta_m$ et $\pi_1, \dots, \pi_n$ tels que :

1. $\forall 1 \leq j \leq n, \sum_{1 \leq i \leq m} \beta_i a_{j,i} \leq q_j$.
2. $\forall 1 \leq i \leq m, \beta_i \sum_{1 \leq j \leq n} \pi_j a_{j,i} \geq e_i$.
3. $\sum_j \pi_j q_j = \sum_i \beta_i e_i$.

4. $\forall 1 \leq j \leq n, \pi_j \geq 0$
5. $\forall 1 \leq i \leq m, \beta_i \geq 0$

Théorème 11 (Optimalité dans ce cas particulier)

*Pour les contraintes précédentes sur la forme des utilités,
on a une bijection entre une solution optimale de FEAS et un équilibre.*

6.3 Nécessité de l'approximation

Nous allons dévoiler une limite théorique simple qui justifie en grande partie la nécessité de l'approximation dans le calcul d'équilibre, même pour des utilités simples comme celles décrites dans l'exemple de la section sur le problème CP.

Prenons la situation où on a 2 marchandises, 3 acheteurs et les données initiales suivantes : $q_1 = q_2 = 3$, $e_1 = e_2 = e_3 = 1$, $a_1 = (1, \frac{1}{2})$, $a_2 = (\frac{1}{2}, 1)$, $a_3 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{5})$.

Vu comme un problème CP, on peut se réduire à :
Maximiser $(\beta_1 * \beta_2 * \beta_3)^{\frac{1}{3}}$ sont les contraintes :

1. $\beta_1 + \frac{\beta_2}{2} + \frac{\beta_3}{4} \leq 3$
2. $\frac{\beta_1}{2} + \beta_2 + \frac{\beta_3}{5} \leq 3$
3. $\forall 1 \leq i \leq 3, \beta_i \geq 0$

La solution optimale pour ce problème est
 $\beta_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $\beta_2 = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$ et $\beta_3 = 10 - \frac{10}{\sqrt{3}}$
et cela implique que les prix et les paniers contiennent des éléments irrationnels.

6.4 Généralisation : le problème CPG

Pour $x_{j,i}$ la quantité de la marchandise j dans le panier $(x_i = (x_{1,i}, \dots, x_{n,i}))$ de i .

Définition 11 (Le problème CPG)

Le but est de maximiser $(\prod_{i=1}^m ((u_i(x_i))_i^e)^{\frac{1}{e_1 + \dots + e_n}}$ sous les contraintes :

1. $\forall 1 \leq j \leq n, \sum_{1 \leq i \leq m} x_{j,i} \leq q_j$.
2. $\forall 1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq m, x_{j,i} \geq 0$

Lorsque les u_i sont supposées concaves, la fonction objectif est elle aussi concave, on se réduit alors à un problème de programmation convexe.

6.5 Approximation polynomiale pour des utilités de Leontief

Si les u_i satisfont des hypothèses supplémentaires
([BCKV] donne par exemple la condition suffisante : $(H_u : \sum_{j=1}^n x_{j,i} \frac{\partial u_i}{\partial x_{j,i}} = u_i(x_i) \cdot)$),
alors le système est soluble polynomialement par l'ellipsoïde algorithme.

Définition 12 (Fonctions d'utilité CES)

Soit σ une constante d'élasticité de substitution

Les fonctions d'utilité CES sont de la forme :

$$u(z_1, \dots, z_n) = (\sum_{j=1}^n \alpha_j^{\frac{1}{\sigma}} z_j^{\frac{\sigma-1}{\sigma}})^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}.$$

Théorème 12 (Cadre couvert par ces fonctions)

*Toute fonction d'utilité scalaire différentiable
(les fonctions linéaires en sont un cas particulier).
vérifient l'hypothèse H_u*

Corollaire 5

*L'approximation d'un équilibre pour des fonctions d'utilité CES est donc
réalisable en temps polynomial par l'ellipsoïde algorithme.*

Chapitre 7

Vers une formalisation générale et une approximation exponentielle

On adopte maintenant une formalisation “à la Walras”, avec n marchandises et m agents et on propose un cadre général dans lequel on peut encore approximer les prix en équilibre. En effet, ces prix peuvent être vus, et ce sera le thème de ce chapitre, comme les points fixes d’une fonction continue.

Soit $\pi = \pi_1, \dots, \pi_n$ un *vecteur de prix*.

A chaque agent i correspond un *vecteur de demande* X_i , et une *dotation* initiale : le vecteur e_i (une coordonnée par quantité initiale de marchandise). Le but de cet agent est de maximiser $u_i(X_i)$ où X_i est son panier d’achat (u_i est la fonction d’utilité de l’agent i supposée continue) sous la contrainte $p.X_i \leq p.e_i$ i.e. on finance la demande de marchandises X_i par la vente de sa dotation

Conditions supplémentaires sur les vecteurs de demande et notations

Ces conditions n’ont pas nécessairement de fondement économique mais simplifient la description.

1. On se réduit à des prix normés par le simplexe $S = \{\pi | \pi_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^n \pi_i = 1\}$.
2. On note $\chi_i(p)$ l’attribution optimale pour l’agent i au prix p que l’on suppose continue et avec un unique optimum
3. on note alors $\beta(p) = \sum_{i=1}^n \chi_i(p)$.
4. Toutes les fonctions de demande sont continues sur le simplexe.

Remarques

Un vecteur de prix est *en équilibre* si, pour ces prix, et pour toute marchandise, l’excès de demande du marché ($\beta(p)$) est inférieur à $E = \sum_{i=1}^n e_i$.

Interprétation :

Si le prix est tel qu'il y ait une demande excessive, on va augmenter les prix de (demande - dotation).

On notera α la constante permettant de normaliser les prix :

Posons enfin $\phi(p) = \prod_{j=1}^m \phi_j(p)$ avec $\phi_j(p) = \frac{p_j + [\beta_j - E_j]^+}{\alpha}$
(on notera $[t]^+ = \max(0, t)$)

7.1 Réduction à un problème de point fixe

La fonction ϕ ainsi posée est continue du simplexe dans lui-même, donc par le théorème de Brouwer (voir I chapitre 2), il existe un point fixe. Dans les conditions du début de section, on peut remarquer :

Lemme 12

Pour un point fixe p^ de la fonction ϕ ,
alors, pour tout produit j , $\beta_j \leq E_j$.*

[En effet, pour $\alpha > 1$, posons $d = \beta - E$ et $d' = [\beta]^+$, on veut montrer que $\forall j, d'_j = 0$.
En sommant $p.X_i \leq p.e_i$ on a $p.\beta \leq p.E$ donc $p.(\beta - E) = p.d \leq 0$. Par définition de ϕ , on a $\phi(p) = \frac{1}{\alpha}(p + d')$

d'où $p^*.d = \frac{1}{\alpha}(p^* + d').d$

i.e. $\|d'\|^2 = (k_1)p.d \leq 0$ i.e. $d' = 0$.

□

Corollaire 6

Au point p^ , point fixe de ϕ , on a un marché net.*

Définition 13 *Un Pareto point est un prix où aucun agent ne peut augmenter son utilité (par des échanges)*

i.e avec les notations précédentes, $u_i(\chi^i(p)) \leq u_i(E_i)$

7.2 Une approximation exponentielle pour des fonctions fortement non linéaires

7.2.1 Interprétation d'un point de vue d'échange de marchandises :

Mettons nous dans la situation suivante

- Initialement le l^{ieme} agent possède $W_{l,k}$ unités de la k^{ieme} marchandise.
- La fonction d'utilité est $u_l(x) = (\sum_k (A_{l,k})^{1-a_l} x_k^{a_l})^{\frac{1}{a_l}}$.
- $b_l = \frac{1}{1-a_l}$.

7.2.2 Spécification des données :

- On spécifie les demandes $g_i^l(\pi)$ par deux matrices W et A strictement positives : chacune composée de m lignes (une par agent) et n colonnes (une par marchandise).
- Le vecteur de prix est la donnée de $b_1, \dots, b_n$ où $\forall j, b_j > 0$.
- $g_i^l(\pi) = \frac{A_{l,i} \Sigma_k W_{l,k} \pi_k}{\pi_i^{b_l} \Sigma_k A_{l,k} (\pi_k)^{1-b_l}} - W_{l,i}$
- $g_i(\pi) = \Sigma_{l=1}^m g_i^l(\pi)$
- $\phi_i(\pi) = \frac{\pi_i + \lambda [g_k(\pi)]^+}{1 + \lambda \Sigma_k [g_k(\pi)]^+}$ pour λ une petite constante strictement positive.

7.2.3 Propriété du point fixe :

L'hypothèse de continuité de $\phi(\pi)$ est vérifiée ; le développement de l'expression $\pi_1 g_1^l(\pi^*) + \dots + \pi_n g_n^l(\pi^*)$ redonne bien zéro.

Cela nous confirme donc que les fonctions de demande vérifient les conditions d'un marché net ; ce point fixe de ϕ correspond bien à un vecteur de prix en équilibre.

Le calcul d'une approximation de point fixe de la partie I nous fournit donc une méthode exponentielle déterministe d'une approximation de prix en équilibre dans ce système.

L'intérêt important d'une approche générale est qu'elle permet de mettre en jeu, comme dans l'exemple précédent, des approximations d'équilibre d'Arrow-Dedreu pour des utilités fortement non linéaires, non accessibles à des méthodes simples de gradients.

Chapitre 8

Discussion et perspectives

Nous avons présenté le calcul exact d'équilibre d'Arrow dans un modèle “producteurs-consommateurs” avec utilités linéaires.

Sa complexité, modulo les constantes fixées par la matrice des utilités et les crédits initiaux, est de l'ordre de $n^2 \times MF(n)$ dans lequel $MF(n)$ est la complexité d'un calcul de flot maximal dans le graphe égalité représentant les échanges monétaires. Cette complexité a été une agréable surprise théorique. Il reste quand même à déterminer une borne inférieure non triviale pour ce problème, et à étudier le cas d'une relâche de la contrainte d'exactitude des prix recherchés.

La question de généraliser l'algorithme précédent vient d'être éclairée par [BV04] pour le modèle d'échange et les utilités de Leontief.

Après avoir esquissé les outils nécessaires à cette approximation, un domaine de travail intéressant se dessine : comprendre avec plus de précision le cadre couvert par l'ensemble de fonctions qui vérifient l'hypothèse H_u .

Une autre ambition analytique serait d'étendre le cadre suffisant de ce genre d'hypothèse afin d'obtenir une condition nécessaire et suffisante, dont on voudra caractériser les éléments.

Dans le modèle d'échange avec utilités continues, l'approche de Scarf permet une approximation exponentielle en temps de prix en équilibre d'Arrow-Debreu.

Ce phénomène s'explique par le fait qu'un vecteur de prix en équilibre est le point fixe d'une fonction continue d'un simplexe dans lui-même. On peut donc l'approximer via la partie I :

- au prix des notions sous-jacentes de complexité de l'argument de parité.
- au prix des problèmes liés à l'augmentation dans la dimension de l'espace à considérer (qui est typiquement nombre d'acteurs économiques et/ou nombre de marchandises).
- avec les espoirs de l'ensemble des perspectives de la première partie.

Chapitre 9

Bibliographie

- [AD99] Andrea Dallolio 1999 :
 Efficiency in an Economy with Fixed Costs.

- [BV04] Bruno Codenotti et Kasturi Varadarajan, 2004
 Efficient Computation of Equilibrium Prices for
 Markets with Leontief Utilities.

- [CPV] Bruno Codenotti Sriram Pemmarajuy Kasturi Varadarajan :
 A note on the Computation of Equilibria in Exchange Markets
 with Gross Substitutability.

- [DV&VV] Nikhil R. Devanur et Vijay V. Vazirani :
 Extensions of the Spending Constraint Model:
 Existence and Uniqueness of Equilibria.

- [DW03] David P. Williamson, Spring 2003
 Lecture Notes on Advanced Algorithms.

- [MT8] Microeconomics Theory Topic 8 :
 General Equilibrium.

- [Pap01] Christos Papadimitriou : Algorithmic Aspects of Game Theory.
 Spring 2001 (CS294-1).

- [VV03] Vijay V. Vazirani, Georgia Tech :
 How Intractable is the "Invisible Hand" :
 Polynomial Time Algorithms for Market Equilibria

- [YY04] Yinyu Ye, February 19 (revised April 24), 2004
 A Path to the Arrow-Debreu Competitive
 Market Equilibrium.

Troisième partie

EQUILIBRE DE NASH

Equilibre de Nash et théorie des jeux :

Un des résultats préfondateurs de la théorie des jeux est le théorème du minimax établi en 1928 par John Von Neumann. Il peut s'énoncer ainsi :

“Tout jeu à somme nulle et à deux joueurs, qui ont fait leurs choix dans des ensembles finis de stratégies pures, comporte au moins un équilibre en stratégies mixtes”.

Rappelons la définition d'une stratégie mixte : “c'est une distribution de probabilités affectée par un joueur à l'ensemble des stratégies pures” , sachant que les stratégies pures sont des variables certaines”.

Cependant, le théorème du minimax forme un cas particulier du théorème de John NASH (1950), qui assure que :

“ Tout jeu à n personnes et à un nombre fini de stratégies pures comporte au moins un équilibre (en stratégies mixtes) “ .

John Nash et Oskar Morgenstern posent les bases de La théorie des jeux. Elle sera consacrée par l'obtention du prix Nobel d'économie, en 1994, pour trois auteurs (J.C. Harsany, R. Selten et J. Nash) qui ont “contribué à faire avancer la science économique”.

Un vecteur $(s_1^*, s_2^*, \dots, s_j^*, \dots, s_N^*)$ de stratégies est dit en équilibre si aucun joueur i de N n'a la possibilité d'améliorer sa situation en choisissant une stratégie distincte de s_i^* , dès lors que les autres joueurs ont opté pour les stratégies d'équilibre s_j^* .

La démonstration de l'existence d'équilibre de Nash avec des stratégies probabilistes a engendré des avancées théoriques importantes pour la théorie des jeux, cependant, le passage à l'effectivité induit une complexité encore mystérieuse, puisque jusqu'à récemment, aucun résultat n'exhibait de cas intéressant, constructif et polynomial, de calcul de ces équilibres .

Complexité encore mal cernée :

Historiquement, sa découverte est associée à une conséquence du “Théorème de point fixe de Kakutany”, qui est une extension du “point fixe de Brouwer”. Les premières améliorations ont été effectuées sur les jeux à deux joueurs avec des algorithmes exacts mais exponentiels sur certaines instances. Très récemment, les travaux de Tim Roughgarden et Papadimitriou [PR04] ont permis de rendre effectif et polynomial le calcul exact d'un équilibre de Nash corrélé, dans le cas de jeux symétriques,

dans une représentation compacte naturelle.

Les limites de complexités ne sont pas loin puisqu’une contrainte supplémentaire (du type le paiement espéré pour un des joueurs est au moins k , ou existe-t-il plus d’un équilibre de Nash ?) font passer le problème dans la NP -complétude.

Le cas où on impose un joueur à restreindre l’ensemble de ses stratégies peut sembler une voie de simplification, mais elle peut avoir des conséquences dramatiques dans le cas le plus simple : un équilibre de Nash restreint peut être de support disjoint de tout équilibre mixte quelconque.

Par contre, un résultat étonnant de Lipton, Markakis et Metha en 2002, dévoile que les stratégies à faible support sont une restriction suffisante pour traiter la notion d’ ϵ -équilibre de Nash.

Résumé de la partie

Après quelques définitions et propriétés classiques, nous donnerons les outils pour aborder l’algorithme de Lemke-Howson : une méthode de calcul de stratégies en équilibre, basée sur des notions de programmation linéaire, pour un jeu à deux joueurs. Il a été montré que cet algorithme est exponentiel en temps sur certaines instances mais là encore une analyse plus fine mériterait attention.

La NP -complétude de la recherche d’équilibre avec une contrainte supplémentaire sera ensuite démontrée par une réduction au problème de satisfaisabilité de formule logique.

Nous expliquerons ensuite en quoi les jeux matriciels à deux joueurs, même à utilité dans $\{0, 1\}$, fournissent un cadre riche et déjà NP -complet lorsqu’on veut imposer une contrainte supplémentaire.

Le chapitre suivant introduit l’intérêt des notions de mixités des classes de stratégies et d’équilibre de Nash restreint ; puis, il introduit la notion de classe suffisamment riche. Cette notion permet l’affirmation d’autres résultats positifs d’existence, et de véritables critères d’approximation pour les équilibres restreints, qui étaient remis en cause dans le cas restreint non suffisamment riche.

Le dernier chapitre sera quand à lui consacré aux conséquences de la connaissance d’un équilibre de Nash dans l’explicitation d’un ϵ -équilibre de Nash à stratégies uniformes et à faible support (logarithmique). On en déduira quelques liens entre approximation de matrice de paiement et ϵ -équilibre de Nash.

Chapitre 10

Présentation du problème

Nous sommes dans un cadre où nous voulons représenter un jeu entre un nombre fini de joueurs. Chaque joueur dispose d'un certain nombre de choix. On dit qu'il joue une stratégie pure lorsqu'il utilise systématiquement la même stratégie.

Définition 14 (Stratégie mixte)

Pour un joueur, on appelle Stratégie mixte $x = (x_1, \dots, x_n)$ une distribution de probabilité sur l'ensemble (fini) de ses stratégies pures.

Définition 15 (Equilibre de Nash)

Le support correspondant est l'ensemble des stratégies pures qu'il utilise $\{i | p(x_i) > 0\}$.

Nous allons maintenant présenter la notion d'équilibre de Nash dans le cas des jeux à deux joueurs ; son extension pour un nombre fini quelconque de joueurs est naturelle ; mais les difficultés computationnelles augmentent visiblement .

Dans un jeu à deux joueurs Le *paiement* pour le joueur qu'on appellera “ligne” (respectivement “colonne”) est noté (x, Ry) , (resp (x, Cy)).

Définition 16 (Equilibre de Nash)

une paire de stratégies (x^*, y^*) est un point d' équilibre de Nash si

- $\forall$ stratégie mixte $\bar{x}$ du joueur ligne, $(\bar{x}, Ry^*) \leq (x^*, Ry^*)$
- $\forall$ stratégie mixte $\bar{y}$ du joueur colonne, $(x^*, C\bar{y}) \leq (x^*, Cy^*)$.

Chapitre 11

Equilibres de Nash par une approche de point fixe

On appellera *jeu sous forme stratégique* tout jeu fini d'ensemble de joueurs N ($|N| = n$) tel que :

- Le joueur i joue avec l'ensemble de ses stratégies pures S^i .
- Si les joueurs i jouent une stratégie pure s_i , le paiement du joueur k est donné par une fonction $u^k(s_1, \dots, s_n)$.
- Δ^i : la stratégie du joueur i est une stratégie mixte sur S^i

Théorème 13 (Existence d' équilibre)

Tout jeu fini sous forme stratégique possède un équilibre de Nash.

[Soit $M = \Delta^1 \times \dots \times \Delta^n$; M est compact convexe .

On veut définir $f : M \rightarrow M$.

$p \in M$ est un vecteur à $\sum_{i \in N} |S^i|$

On note $p_{i,k}$ la coordonnée associée au joueur k et à sa i^{ieme} stratégie pure ($S_i^k \in S^k$).

On va définir la coordonnée correspondante dans $f(p)$ par :

$$f_i^k(p) = \frac{p_i^k + [u^k(p^{-k}, S_i^k) - u^k(p)]^+}{\sum_{S_j^k \in S^k} p_i^k + [u^k(p^{-k}, S_j^k) - u^k(p)]^+}$$

où on a noté $x^+ = \max(0, x)$.

Lemme 13

f est de $M \rightarrow M$ et continue (sur un convexe compact).

Il existe donc par le théorème de Brouwer un p tel que $f(p) = p$, que l'on peut effectivement approcher par la section I.2

Lemme 14

Dans les conditions précédentes, p est un équilibre de Nash.

[∇

Chapitre 12

Deux joueurs : Vers Lemke-Howson

12.1 Retour aux stratégies pures pour une réduction à un problème de programmation linéaire (finie)

En connaissant la stratégie du joueur 1, on peut en déduire une stratégie pure pour 2 qui assure un paiement minimum (donc optimal pour 2).

Soit x fixé ; Montrons que

Théorème 14

$$p_m = \text{Min}_{y:\text{mixte}} x^T A y = \text{Min}_{y:\text{pure}} x^T A y = \text{Min}_j \sum_{i=1}^n b_j x_i = \text{Min}_j \sum_{i=1}^n a_{i,j} x_i = p_p$$

[Les stratégies pures sont incluses dans les stratégies mixtes d'où :

$$p_m = \text{Min}_{y:\text{mixte}} x^T A y \leq \text{Min}_{y:\text{pure}} x^T A y = \text{Min}_j \sum_{i=1}^n b_j x_i = p_p.$$

On a donc bien $p_m \leq p_p$.

Comme x est fixé, on a : $x^T R = (x.b_1, \dots, x.b_n)$.

Soit k l'indice où $(x^T.b_j)$ est minimal.

$$\text{Min}_{y:\text{pure}} x^T A y = \text{Min}_j x^T.b_j = x^T.b_k = p_p$$

On a : $\forall j, (x.b_k) \leq (x.b_j)$;

Soit $y = (y_1, \dots, y_n)$ une stratégie mixte quelconque ;

$$x^T R y = [x.b_1, x.b_2, \dots, x.b_n] y = \sum_{j=1}^n (x.b_j) \cdot y_j \geq \sum_{j=1}^n (x.b_k) \cdot y_j = x.b_k.$$

L'arbitraire sur y permet d'affirmer :

$$p_m = \text{Min}_{y:\text{mixte}} x^T R y \geq x.b_k = p_p$$

[∇

Pour le joueur 1, le paiement minimal espéré est

$$z = \text{Max}_{x:\text{mixte}} \text{Min}_{y:\text{mixte}} x^T A y = \text{Max}_{\sum_{i=1}^n x_i=1} \text{Min}_j \sum_{i=1}^n a_{i,j} x_i.$$

Il est atteint lorsqu'on maximise $z_1(x)$ avec

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1 \text{ et}$$

$$\forall j \in [1, n], z_1(x) - \sum_{i=1}^n a_{i,j} x_i \leq 0.$$

La situation est symétrique pour le joueur 2 en posant $z_2(y) = \text{Max}_j \sum_{i=1}^n a_{i,j} y_i$.
Le paiement perdu espéré est $\text{Min}_{\sum_{j=1}^n y_j=1} z_2(y)$.

L'optimalité se traduit donc par la minimisation de $z_2(y)$ sous les contraintes :
 $\forall j \in [1, n], z_2 - \sum_{j=1}^n a_{(i,j)} \cdot y_j \leq 0$. et toujours $\sum_{j=1}^n y_j = 1$

12.2 Jeux à somme nulle : Théorème min-max.

Théorème 15 (Min Max)

Théorème : Pour un jeu à somme nulle, on a $Max Min = Min Max$

[On a toujours, pour c_j : la j^{ieme} ligne de A, et b_i sa i^{ieme} colonne,
 $\sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j \leq \sum_{j=1}^m (\sum_{i=1}^n a_{i,j} y_i) x_i \leq \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^m a_{i,j} x_i) y_i \leq \sum_{i=1}^n b_i y_i$
A l'équilibre, on a :

$$\overline{\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j^* = \sum_{i=1}^m b_i \cdot y_i^*}$$

En effet, pour $i \in [1, \dots, m]$ posons $c_{n+i} = -y_i^*$ ainsi que les variables d'écart :
 $x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j^*$;
 $z = z^* + \sum_{k=1}^{n+m} c_k x_k$
 $z^* = \sum_{j=1}^n c_j x_j^*$
 $\sum_{j=1}^n c_i x_j = z^* + \sum_{k=1}^{n+m} c_k \cdot x_k = (z^* - \sum_{i=1}^m y_i^* b_i) + \sum_{k=1}^n (c_k + \sum_{j=1}^n a_{i,j} y_j^*)$
En regardant les coefficients associés aux x_j on en déduit $z^* = \sum_{i=1}^m y_i^* \cdot b_i$, d'où
 $\sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j^* = \sum_{i=1}^m b_i \cdot y_i^*$
[∇

Les problèmes associés à la résolution des deux optimisations sont duaux. On peut alors se ramener à la résolution d'un problème linéaire et de son dual linéaire, et on est donc dans P pour trouver un équilibre.

12.3 Jeu matriciel à somme quelconque

On peut adapter le raisonnement sur l'optimalité à un jeu à deux joueurs à somme non nulle, le premier (respectivement 2^{ieme}) joueur jouant à partir de m (resp. n) stratégies pures et avec les probabilités x (resp y), avec une matrice de paiement A (resp. B).

En posant $E = (1^m)^T$ (resp $F = (1^n)^T$)
l'optimalité se traduit par $\exists u, v$ tels que

- $E.x = 1$
- $E^T.u - A.y \geq 0$
- $x^T(E^T.u - A.y) = 0$

- $F.y = 1$
- $F^T.v - B.x \geq 0$
- $y^T(F^T.v - B.x) = 0$

On a donc un problème linéaire avec complémentarité. La découverte d'un équilibre se résoud par l'algorithme de Lemke-Howson qui intègre les contraintes de complémentarité dans la résolution simpliciale.

12.4 Normalisation d'un des deux joueurs pour les jeux bimatriciels

Proposition :

Soient A et B deux matrices $m \times n$;

Soit I la $(m+n) \times (m+n)$ matrice identité;

Posons

$$C = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B^T & 0 \end{pmatrix}$$

Un équilibre de Nash dans le jeu A,B est en correspondance point à point avec les stratégies du joueur 1 dans un équilibre de Nash dans le jeu (I,C).

12.5 Lemke-Howson

12.5.1 Coloration de Lemke-Howson

Soit un jeu bimatriciel donné par les matrices de paiements A et B. A un point du simplexe $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$, des stratégies de A on peut associer sa coloration “Lemke-Howson” : un ensemble d’entiers qui est alors $c_1 \cup c_2$ où c_1 contient des éléments de $\{1, \dots, n\}$: “i” est dans c_1 ssi π_i est nulle et c_2 contient des éléments de $\{n+1, \dots, n+m\}$: “j” est dans c_2 ssi la j^{eme} coordonnée de (πA) est une coordonnée maximale.

Exemple :

Prenons le jeu bimatriciel donné par les matrices de paiements :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

et

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Coordonnées	Paieiment	Coloration
(0,1)	(6,5,3)	1,3
(1,0)	(0,2,3)	2,5
$(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$	(4,4,3)	3,4
$(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$	(2,3,3)	4,5
$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$(3, \frac{7}{2}, 3)$	4
(1,0,0)	(1,0)	1,4,5
(0,1,0)	(0,2)	2,3,5
(0,0,1)	(4,3)	1,3,4
$(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$	$(\frac{8}{3}, \frac{8}{3})$	1,2,3

12.5.2 Lemke-Howson contraint

Dans le cas d’un jeu à deux joueurs, nous allons essayer de montrer comment tirer parti de la connaissance d’une des probabilité jouée, lors de la décision de la question “existe-t-il un équilibre de Nash utilisant cette probabilité pour cette stratégie”. Pour cela, nous allons utiliser des conséquences de l’algorithme de Lemke-Howson.

Démontrer l'absence d'équilibre contraint sur un exemple

Fixer l'ensemble d'une stratégie

Supposons que l'on cherche à décider s'il existe un équilibre de Nash dans lequel la première coordonnée pour le joueur 1 est $\frac{1}{2}$. On peut considérer que le joueur 1 joue la stratégie $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Le paiement est alors $(3, \frac{7}{2}, 3)$ et le point est colorié 4. On peut immédiatement vérifier qu'il n'existe pas d'équilibre de Nash associé à cette stratégie, puisqu'il n'est pas possible d'obtenir une coloration $(1,2,3,5)$ pour le joueur 2.

Laisser une variable libre

Supposons que l'on cherche à décider s'il existe un équilibre de Nash dans lequel la première coordonnée pour le joueur 2 est $\frac{1}{2}$. On peut considérer que le joueur 2 joue la stratégie $(\frac{1}{2}, \alpha, \frac{1}{2} - \alpha)$. Le paiement est alors $(\frac{3}{2} - \alpha, \frac{9}{2} + 2\alpha)$

1. Si $\alpha = 0$, le paiement est $(\frac{3}{2}, \frac{9}{2})$: le coloriage associé est $(2,4)$.
2. Si $\alpha = \frac{1}{2}$, le paiement est alors $(1, \frac{11}{2})$: le coloriage associé est $(2,5)$.
3. Si $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$, le coloriage associé est 2.

Dans les trois cas précédents, il est nécessaire d'obtenir 1 pour la stratégie du joueur 1, ce qui impose que le joueur 1 joue la stratégie pure $(0,1)$, donc aura une coloration $(1,3)$ non complémentaire des trois cas précédents.

Démontrer la présence d'équilibre contraint

Supposons que l'on cherche à décider s'il existe un équilibre de Nash dans lequel la dernière coordonnée pour le joueur 2 est $\frac{2}{3}$. On peut alors considérer que le joueur 2 joue la stratégie $(\frac{1}{3} - \alpha, \alpha, \frac{2}{3})$. Le paiement est alors $(2 + 2\alpha, 4 - \alpha)$

1. Si $\alpha = 0$, le paiement est $(2, 4)$: le coloriage associé est $(2,4)$.
2. Si $\alpha = \frac{1}{3}$, le paiement est alors $(\frac{8}{3}, \frac{8}{3})$: le coloriage associé est $(1,2,3)$.
3. Si $\alpha \in]0, \frac{1}{3}[$, le coloriage associé est 2.

Dans les cas précédents 1 et 3, il est à nouveau nécessaire d'obtenir 1 pour la stratégie du joueur 1, ce qui impose que le joueur 1 joue la stratégie pure $(0,1)$, donc aura une coloration $(1,3)$ non complémentaire des ces deux cas.

Dans le cas 2, pour obtenir 4 et 5, il faut une stratégie dont les deuxième et troisième coordonnées des paiements associés coïncident.

En résolvant ceci à partir de la matrice A, on obtient $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ pour des paiements $(2, 3, 3)$ et donc un coloriage $(4,5)$ qui est bien complémentaire de $(1,2,3)$.

La paire $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ et $(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ est une paire en équilibre de Nash.

Chapitre 13

Difficulté du cas général contraint

13.1 Lien SAT - Equilibres de Nash avec Contrainte supplémentaire

Nous allons montrer que l'on peut transformer une formule sous forme normale conjonctive en un jeu bimatriciel où les équilibres sont en relation avec la satisfaisabilité de la formule. Soient

Φ une formule logique CNF,

V l'ensemble de ses n variables,

L l'ensemble de ses littéraux (deux littéraux par variable)

C l'ensemble de ses clauses

$v : L \rightarrow V$ qui redonne la variable (x_1) associée au littéral (x_1 ou $\neg x_1$).

Définition 17 (Jeu symétrique associé)

On parlera de jeu symétrique associé le jeu G_Φ

dont l'ensemble des stratégies de chaque joueur est $\Sigma = L \cup V \cup C \cup \{f\}$,

et dont les utilités sont posées selon les conditions suivantes :

Conditions	Utilités
$\forall l^1, l^2 \in L, l^1 \neq -l^2$	$u_1(l^1, l^2) = u_2(l^2, l^1) = 1$
$\forall l \in L$	$u_1(l, -l) = u_2(-l, l) = -2$
$\forall l \in L, x \in \Sigma - L$	$u_1(l, x) = u_2(x, l) = -2$
$\forall l \in L, v \in V, v(l) \neq v$	$u_1(v, l) = u_2(l, v) = 2$
$\forall l \in L, v \in V, v(l) = v$	$u_1(v, l) = u_2(l, v) = 2 - n$
$\forall v \in V, x \in \Sigma - L$	$u_1(v, x) = u_2(x, v) = -2$
$\forall c \in C, l \in L, l \notin c$	$u_1(c, l) = u_2(l, c) = 2$
$\forall c \in C, l \in L, l \in c$	$u_1(c, l) = u_2(l, c) = 2 - n$
$\forall c \in C, x \in \Sigma - L, l \in c$	$u_1(c, l) = u_2(l, c) = -2$
	$u_1(f, f) = u_2(f, f) = 0$
$\forall x \in \Sigma - \{f\}$	$u_1(f, x) = u_2(x, f) = 1$

Théorème 16

si $(l_1, \dots, l_n)$ satisfait Φ (où $v(l_i) = x_i$)

Il existe un équilibre de Nash pour G_Φ dans lequel
chaque joueur joue l_i avec une probabilité $\frac{1}{n}$,
(utilité espérée = 1).

L'unique autre équilibre est atteint quand les deux joueurs jouent $\{f\}$.
(utilité espérée = 0).

13.1.1 Preuve, Exemple et remarques

Exemple : Soit $\phi = c_1 \wedge c_2 \wedge c_3$ où $c_1 = (\underline{x} \vee \underline{y} \vee \underline{z})$, $c_2 = (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z})$, $c_3 = (\underline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z})$,
les matrices correspondantes sont alors $A =$

	<u>x</u>	<u>x̄</u>	<u>y</u>	<u>ȳ</u>	<u>z</u>	<u>z̄</u>	x	y	z	c ₁	c ₂	c ₃	f
<u>x</u>	1	-2	1	1	1	1	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
<u>x̄</u>	-2	1	1	1	1	1	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
<u>y</u>	1	1	1	-2	1	1	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
<u>ȳ</u>	1	1	-2	1	1	1	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
<u>z</u>	1	1	1	1	1	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
<u>z̄</u>	1	1	1	1	-2	1	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
x	-1	-1	2	2	2	2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
y	2	2	-1	-1	2	2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
z	2	2	2	2	-1	-1	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
c ₁	-1	2	-1	2	-1	2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
c ₂	2	-1	2	-1	2	-1	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
c ₃	-1	2	-1	-1	-1	-1	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
f	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0

et $B = A^T =$

	<u>x</u>	<u>x̄</u>	<u>y</u>	<u>ȳ</u>	<u>z</u>	<u>z̄</u>	x	y	z	c ₁	c ₂	c ₃	f
<u>x</u>	1	-2	1	1	1	1	-1	2	2	-1	2	-1	1
<u>x̄</u>	-2	1	1	1	1	1	-1	2	2	2	-1	2	1
<u>y</u>	1	1	1	-2	1	1	2	-1	2	-1	2	-1	1
<u>ȳ</u>	1	1	-2	1	1	1	2	-1	2	2	-1	-1	1
<u>z</u>	1	1	1	1	1	-2	2	2	-1	-1	2	-1	1
<u>z̄</u>	1	1	1	1	-2	1	2	2	-1	2	-1	-1	1
x	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	1
y	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	1
z	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	1
c ₁	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	1
c ₂	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	1
c ₃	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	1
f	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	0

Le joueur 1 joue les lignes avec la matrice de paiement A, , le joueur 2 joue les colonnes et sa matrice de paiement est B.

On a introduit un équilibre de Nash artificiel :

Lemme 15

(f, f) est un équilibre de Nash.

En effet, lorsque le joueur 2 joue $\{f\}$, l'unique meilleure réponse de 1 est de choisir la plus grande composante de la dernière colonne de A : $(-2, -2, \dots, -2, 0)^T$ et donc de jouer également $\{f\}$. Symétriquement, si 1 joue $\{f\}$, l'unique meilleure réponse de 2 est de choisir la plus grande composante de la dernière ligne de B : $(-2, -2, \dots, -2, 0)$ et donc de jouer également $\{f\}$. On obtient les paiements $(0, 0)$ dans l'équilibre de Nash $(\{f\}, \{f\})$.

Il ne faut pas jouer dans V et C :

Lemme 16

Il n'existe pas d'équilibre de Nash dans lequel un joueur joue dans $V \cup C$ avec une probabilité strictement positive.

Aucune issue du jeu ne garantit un total de gain supérieur à 2 :
i.e. $E(u_1 + u_2 | a_1 \neq f \wedge a_2 \neq f) \leq 2$.
Si on assigne une probabilité strictement positive sur n'importe quelle stratégie de $V \cup C$, on a alors
 $E(u_1 + u_2 | a_1 \neq f \wedge a_2 \neq f) < 2$
Il existe donc $i \in \{1, 2\}$ tel que $E(u_i | a_1 \neq f \wedge a_2 \neq f) = \alpha < 1$
Supposons qu'il s'agit de "i=1", le cas "i=2" étant symétrique.
 $E(u_1) < \alpha Pr(a_1 \neq f).Pr(a_2 \neq f) + Pr(a_1 = f).Pr(a_2 \neq f) = Pr(a_2 \neq f) \times (Pr(a_1 = f) + \alpha Pr(a_1 \neq f)) < Pr(a_2 \neq f)$.
Le joueur 1 obtient alors moins de $Pr(a_2 \neq f)$ alors qu'il aurait obtenu exactement $Pr(a_2 \neq f)$ en jouant $\{f\}$.

Tous les équilibres de Nash sont à support $\subset L \cup \{f\}$.

Dans l'exemple :

Supposons que le joueur 1 joue la stratégie $\{x\} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$; le joueur 2 peut obtenir un paiement de 1 par la stratégie f et ne peut espérer qu'un paiement -2 pour toute autre stratégie qui exclue f . Le paiement de 1 est alors -2 , et il doit dévier la probabilité mise sur x vers la stratégie f .
Cela s'étend naturellement pour exclure toute stratégie à support intersectant V ; la situation est similaire pour les stratégies à support intersectant C , qui dérivent de la même manière vers la stratégie f et ne conduisent pas à des équilibres de Nash.

Il faut jouer exclusivement f ou dans L :

Lemme 17

*Dans un Equilibre de Nash,
Soit tous les joueurs jouent uniquement dans L ,
Soit tous les joueurs jouent uniquement $\{f\}$.*

Supposons que les deux joueurs aient un support qui intersecte L et f ;
 $E(u_1) \leq Pr(a_1 \in L).Pr(a_2 \in L) - 2Pr(a_1 \in L).Pr(a_2 = f) + Pr(a_1 = f).Pr(a_2 \in L)$
 $= Pr(a_2 \in L) - 2Pr(a_1 \in L).Pr(a_2 = f) < Pr(a_2 \in L)$.
 Le gain du joueur 1 s'il n'avait joué que f aurait été : $E(u_1) = 1 - Pr(a_2 = f) = Pr(a_2 \in L)$, donc strictement meilleur.

Dans notre exemple :

Dans une situation où les deux joueurs jouent équiprobablement $\underline{x}$ et f , i.e. $(\frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{2})$, les paiements espérés sont symétriques :

$$E(u_1) = E(u_2) = \frac{1}{2} \times (1 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} \times (1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{2}) = 0$$

On remarque que si le joueur 1 joue uniquement f , son paiement devient $\frac{1}{2}$ donc strictement meilleur. La preuve du lemme montre que ce phénomène s'observe bien chaque fois que les deux supports intersectent L et f .

On arrive donc à :

Tout Equilibre de Nash, autre que (f, f) , a son support dans L .

Uniformité sur L pour un autre équilibre

Lemme 18

*Dans un Equilibre de Nash à support dans L , $\forall i, j$
 $Pr(a_i = l_j) + Pr(a_i = l_j) = \frac{1}{n}$*

Dans un équilibre à support dans L , l'utilité espérée de chaque joueur est au plus 1.

Si $Pr(a_1 = l_j) + Pr(a_1 = l_j) < \frac{1}{n}$ alors le joueur 2, en jouant uniquement $v(l_i)$ peut attendre : $E(u_2) > \frac{1}{n}(2 - n) + \frac{n-1}{n}2 > 1$, ce qui est en contradiction avec la première remarque.

Dans l'exemple :

Dans le cas où les deux joueurs jouent $\underline{x}$ et $\underline{z}$ avec des probabilités $\frac{1}{4}$ et $\underline{y}$ avec une probabilité $\frac{1}{2}$ représentable par la stratégie $(\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, Les paiements sont : $E(u_1) = E(u_2) = \frac{1}{4}(1 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4}) + \frac{1}{2}(1 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4}) + \frac{1}{4}(1 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4}) = 1$.
 Le résultat aurait été similaire pour 2 jouant équiprobablement $\underline{x}$, $\underline{y}$ et $\underline{z}$.
 Pourtant lorsque le joueur 2 se met à jouer uniquement x , donc une des paires de littéraux insuffisamment pondérée, les paiements deviennent : $E(u_2) = -\frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{4} > 1$ et $E(u_2) = -2$, et nous ne sommes donc pas dans une situation d'équilibre.

Il ne faut pas jouer un littéral et son opposé

Lemme 19

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Dans un Equilibre de Nash à support dans } L, \forall i, j \\ Pr(a_i = l_j) \times Pr(a_i = -l_j) = 0 \end{array}}$$

Supposons en effet que $Pr(a_i = l_j) > 0$ et $Pr(a_i = -l_j) > 0$;
alors $E(u_1) = Pr(a_1 \neq a_2) - 2Pr(a_1 = -a_2) < 1$ puisque $Pr(a_1 = -a_2) > 0$. le
joueur 1, en jouant f augmenterait alors son utilité ; il est donc garanti qu'il n'existe
pas d'équilibre où un joueur utiliserait un support contenant un littéral et son opposé.

Dans l'exemple :

Si le joueur 1 joue la stratégie $(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ et le joueur 2 la stra-
tégie $(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ alors le paiement de 1 est
 $E(u_1) = \frac{1}{6}(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}) + \frac{1}{6}(-\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}) + \frac{1}{3}(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}) + \frac{1}{6}(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}) = \frac{5}{6} < 1$
donc pas de possibilité d'équilibre, puisque 1 dévierait sur la stratégie f .

Dans un équilibre de Nash qui n'est pas (f, f) , pour tout i , soit les deux joueurs
jouent l_i avec probabilité $\frac{1}{n}$, soit les deux joueurs jouent $-l_i$ avec probabilité $\frac{1}{n}$.

Les équilibres à support dans L sont en bijection avec les affectations satisfaisant la formule logique

Lemme 20

$$\boxed{\text{Si } \phi \text{ n'est pas satisfaisable, alors } (f, f) \text{ est l'unique un Equilibre de Nash.}}$$

Supposant que les deux joueurs donnent des probabilités $\frac{1}{n}$ au même ensemble
de littéraux $(l_1, \dots, l_n)$ avec $\forall i : v(l_i) = x_i$, mais que ces littéraux constituent une
affectation qui ne satisfait pas Φ .

Il existe donc une clause c telle que $\forall j, l_j \notin c$.

Si le joueur 2 réduit sa stratégie à cette clause c , il obtiendra une utilité 2.

Dans l'exemple Si les deux joueurs jouent la stratégie $(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$,
les paiements sont $(1, 1)$.

La clause c_2 n'est pas satisfaite ; si le joueur 2 ne joue plus que cette clause c_2 alors
son paiement devient :

$E(u_2) = \frac{1}{3}2 + \frac{1}{3}2 + \frac{1}{3}2 = 2$ alors que le joueur 1 n'espère plus que -2 et nous ne
sommes pas sur un équilibre de Nash.

S'ils jouent tous deux $(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, on a un équilibre de Nash d'uti-
lités $(1, 1)$ correspondant à l'affectation $x = \underline{x}$, $y = \underline{y}$ et $z = \underline{z}$ qui satisfait bien la
formule logique Φ .

13.2 Corollaires : Autres problèmes contraints NP-durs

On appellera *espérance sociale* l'espérance de la somme des utilités individuelles.

Corollaire 7

Même pour les jeux à deux joueurs symétriques, il est NP-dur de déterminer s'il existe un équilibre de Nash d'espérance sociale au moins k ; (même quand k est l'espérance sociale maximale qui peut être obtenue dans le jeu)

Corollaire 8

Même pour les jeux à deux joueurs symétriques, les problèmes suivants sont NP-durs

- *Déterminer s'il existe plus d'un E.N.*
- *Déterminer s'il existe un E.N. pareto optimal (déviation $\Rightarrow$ ou plus un joueur conserve un paiement supérieur)*
- *Déterminer s'il existe un E.N. dans lequel le joueur 1 joue parfois $x \in \Sigma_1$*
- *Déterminer s'il existe un E.N. dans lequel le joueur 1 ne joue jamais $x \in \Sigma_1$*

13.3 Dureté pour les SBG

Définition 18 (SBG) *On parlera de SBG (Simple Bimatrix Game) pour les jeux à deux joueurs dans lesquels les éléments des matrices d'utilités sont des éléments de $\{0, 1\}$.*

Dans le cas des SBG, on peut montrer (voir [CS03]) qu'il est NP-complet de décider s'il existe plus d'un équilibre de Nash.

La difficulté est la même pour décider de l'existence d'un équilibre de Nash qui assure un paiement au moins k pour le second joueur, même pour un SBG sous la forme (I, A) .

Chapitre 14

Equilibres avec restrictions de classes de stratégies

14.1 Equilibre restreint et Mixité

Nous allons présenter la situation dans le cas de jeux à deux joueurs, les idées sont largement inspirées de [KMNS].

Définition 19 (Equilibre de Nash restreint)

Soient Π_1 et Π_2 (des classes de stratégies réduites) données, un équilibre de Nash restreint est une paire $(\pi_1^*, \pi_2^*) \in \Pi_1 \times \Pi_2$ telle que :

$$\begin{aligned}\forall \pi_1 \in \Pi_1, \pi_1^{*T} R \pi_2^* &\geq \pi_1^T R \pi_2^* \\ \forall \pi_2 \in \Pi_2, \pi_1^{*T} C \pi_2^* &\geq \pi_1^{*T} C \pi_2\end{aligned}$$

Définition 20 (Cloture mixte)

Π , une classe restreinte de stratégies, est dite close par mixage si $\forall \pi, \pi' \in \Pi$ et $\forall \alpha \in [0, 1]$ on a : $\alpha \pi + (1 - \alpha) \pi' \in \Pi$

Exemple de Π : Gauss_k

Soit la densité gaussienne (de moyenne μ et de variance σ^2)

$$N(p|\mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(p-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

La cloture mixte de k gaussiennes est

$$\Pi(p) = \sum_{i=1}^k \omega_i N(p|\mu_i, \sigma_i^2) \text{ avec}$$

$$\omega_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^k \omega_i = 1$$

Théorème 17

*Pour un jeu à deux joueurs et des classes de stratégie Π_1 et Π_2 données
Si Π_1 et Π_2 sont tous les deux compacts et clos par mixage*

Alors le jeu possède un équilibre de Nash restreint dans les classes de stratégies données.

[La preuve de Nash par le théorème du point fixe (Brouwer ou Kakutani) s'adapte à ce cas (les Π prenant le rôle des stratégies pures)

□

Définition 21 (Classe mixte)

Π , une classe restreinte de stratégies, est dite classe mixte si pour un k fini et des distributions $p_1, \dots, p_k$ tels que Π est composé d'exactlyement les mixages des p_i .

(i.e. $\Pi = \{\pi : \pi_a = \sum_i \omega_i p_i(a), \omega_i \geq 0 \text{ et } \sum_i \omega_i = 1\}$).

Dans l'exemple $Gauss_k$, on est dans cette situation pour k , μ_i et σ_i^2 fixés et lorsque les ω_i sont les paramètres libres de la classe.

Théorème 18

*Pour un jeu à deux joueurs et des classes de stratégies Π_1 et Π_2 données
Si Π_1 et Π_2 sont des classes mixtes*

Alors le jeu possède un équilibre de Nash restreint dans les classes de stratégies données.

[Supposons que Π_1 (resp. Π_2) est donné par $p_1^1, \dots, p_{k_1}^1$ (resp $p_1^2, \dots, p_{k_2}^2$), le joueur i possède k_i actions et les matrices de paiements R pour le joueur 1 (resp. C pour le joueur 2).

Losque le joueur 1 joue i et le joueur 2 joue j , on propose le nouveau jeu dont les paiements sont donnés par :

$$\overline{R}_{i,j} = E_{a_1 \sim p_i^1, a_2 \sim p_j^1} R_{a_1, a_2} \text{ et } \overline{C}_{i,j} = E_{a_1 \sim p_i^1, a_2 \sim p_j^1} C_{a_1, a_2}.$$

Dans le nouveau jeu, chaque joueur joue une composante mixte, et les paiements sont les espérances issues de composantes choisies dans le jeu original.

Dans la nouvelle $(k_1 \times k_2)$ matrice de jeu, on a l'existence (par le théorème de Nash classique) d'une paire de Nash non restreinte (ω^1, ω^2) .

Or, ω_1 (resp. ω_2) dans le jeu modifié correspond à une stratégie dans Π_1 (resp. Π_2) dans le jeu initial puisque Π_1 (resp. Π_2) contient toutes les composantes mixtes.

□

14.2 Une première limite

Il est possible de construire un exemple dans lequel l'unique équilibre de Nash restreint n'approxime aucun équilibre de Nash non-restreint :

Prenons

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 - \frac{\epsilon_1}{2} & 1 - \frac{\epsilon_1}{2} & 1 - \frac{\epsilon_1}{2} & 1 - \frac{\epsilon_1}{2} \\ 1 & 1 & 1 + 2\epsilon_2 & 1 + 2\epsilon_2 \end{pmatrix}^2$$

Posons $C = R^T$, $\pi^a = [1 - \epsilon_1, \epsilon_1, 0, 0]$, $\pi^b = [0, 0, 1, 0]$ et $\Pi_1 = \Pi_2 = \{\pi^a, \pi^b\}$.

On remarque :

- (π^a, π^b) est une ϵ_1 -paire de Nash (de paiements $1 - \epsilon_1$).
- Quand le joueur 1 (resp. 2) joue π^b , il reçoit strictement plus face à π^a ($1 - \frac{\epsilon_1}{2}$).
- Ces paiements sont obtenus par l'unique paire de Nash restreinte : (π^b, π^b) .
- (π^b, π^b) n'est pas une ϵ_2 -paire de Nash car le paiement peut passer à $1 + 2\epsilon_2$.
- Le vecteur $[0, 0, 0, 1]$ (action 4) domine donc strictement π^b d'où : une paire (non restreinte) de Nash ne peut assigner une probabilité strictement positive à l'action 3.
- π^b est alors à distance 1 de toute paire de Nash non restreinte.

14.3 Expressivité suffisante pour traiter l'approximation

Définition 22 (Classe suffisamment riche)

Soient Π_1, Π_2 des classes restreintes de stratégies, et $\epsilon > 0$. On dira que Π_1 est suffisamment riche si elle permet d'approcher un paiement ϵ -proche de la meilleur réponse (non restreinte) à toute stratégie de Π_2 .

(i.e. $\pi_2 \in \Pi_2, \exists \pi_1 \in \Pi_1$ tel que $\forall \pi'_1 : \pi'_1{}^T R \pi_2 \leq \pi_1^T R \pi_2 + \epsilon$).

Cette définition nous permet d'affirmer :

Théorème 19

Pour Π_1, Π_2 et ϵ donnés
Si Π_1 et Π_2 sont suffisamment riches pour ce même ϵ :
Alors tout équilibre de Nash restreint (s'il en existe) est aussi un ϵ -Nash équilibre.

Chapitre 15

ϵ -équilibre à faible support

Ce chapitre vise à donner un résultat étonnant des déductions que l'on peut faire de la connaissance d'un équilibre de Nash, dans un but d'explicitation d'équilibres approchés.

Définition 23 Soit $\epsilon > 0$, un couple (x', y') est un ϵ -équilibre de Nash si

1. $\forall$ stratégie mixte $\bar{x}$ du joueur ligne, $(\bar{x}, Ry') \leq (x', Ry') + \epsilon$
2. $\forall$ stratégie mixte $\bar{y}$ du joueur colonne, $(x', C\bar{y}) \leq (x', Cy') + \epsilon$.

On suppose maintenant que tous les coefficients de R et C sont dans $[0, 1]$.

15.1 Le résultat principal de Lipton, Markakis et Mehta

Théorème 20 *Déduction d' ϵ -équilibres de la connaissance d'un équilibre exact :*

$\begin{aligned} &\forall (x^*, y^*) \text{ un équilibre de Nash,} \\ &\quad \forall \epsilon > 0, \\ &\quad \forall k \leq \frac{12 \ln n}{\epsilon^2} \end{aligned}$ <i>Il existe un couple (x', y') de stratégies k-uniformes tel que</i> - (x', y') est un ϵ-équilibre. - $(x', Ry') - (x^*, Ry^*) < \epsilon$ - $(x', Cy') - (x^*, Cy^*) < \epsilon$

15.1.1 Preuve

[Soient (x^*, y^*) un équilibre de Nash, $\epsilon > 0$, n le nombre (commun) de stratégies pures pour chaque joueur, et $k \leq \frac{12 \ln n}{\epsilon^2}$ fixés.

Dans l'ensemble des stratégies pures du joueur ligne (resp. colonne) on prélève k éléments, aléatoirement et suivant la distribution de x^* (resp. y^*), pour former le multi-ensemble A (resp. B).

Posons x' (resp. y') la stratégie k -uniforme restreinte à A (resp. à B).

(Être présent dans A α fois veut dire être affecté d'une probabilité $\frac{\alpha}{k}$).

Posons :

$$\phi_1 = \{|(x', Ry') - (x^*, Ry^*)| < \frac{\epsilon}{2}\}.$$

(Signifie que le paiement avec A et B pour le joueur colonne est proche de celui de Nash).

$\forall i \in [1, n]$, et pour x^i désignant la i^{ieme} stratégie pure de colonne, posons

$$\pi_{1,i} = \{(x^i, Ry') < (x', Ry') + \epsilon\}.$$

(Si le joueur colonne se réduit à sa i^{ieme} stratégie pure alors, il ne peut espérer gagner plus ϵ de plus qu'avec sa stratégie d' ϵ -équilibre).

$$\text{Soit } GOOD = \phi_1 \cap \bigcap_{i=1}^n \pi_{1,i} \cap \phi_2 \cap \bigcap_{i=1}^n \pi_{2,i}.$$

Lemme 21

*Si $Pr(GOOD) > 0$ alors
cela veut dire que les stratégies issues de A et B
satisfont les hypothèses du théorème.*

En effet, ϕ_1 assure la condition 2 du théorème, ϕ_2 assure la condition 3, et on peut étendre "le contrôle d' ϵ -équilibre" obtenu pour les stratégies pures à toutes les stratégies mixtes.

Lemme 22 (trivial par récurrence)

Pour $(E_i)_{i=1..k}$ des événements, on a :
$$Pr((\bigcap_{i=1}^k E_i)^c) \leq \sum_{i=1}^k Pr(E_i^c)$$

Lemme 23 (Borne de Hoeffding)

*Pour une somme s de k variables indépendantes d'espérance E ,
Soit $\phi = \{|s - E| < \epsilon\}$
(on peut contrôler la probabilité d'écart à l'espérance par) :*

$$Pr(\phi^c) \leq 2e^{-2k\epsilon^2}$$

Fin de la preuve du théorème :

- On pose :
 $\phi_{1,a} = \{|(x', Ry^*) - (x^*, Ry^*)| < \frac{\epsilon}{4}\}.$
 $\phi_{1,b} = \{|(x', Ry') - (x', Ry^*)| < \frac{\epsilon}{4}\}.$
- On remarque que $\phi_{1,a} \cap \phi_{1,b}$ est inclus dans ϕ_1 . En effet, dans $\phi_{1,a} \cap \phi_{1,b}$ on a :
 $|(x', Ry') - (x^*, Ry^*)| \leq |(x', Ry) - (x^*, Ry^*)| + |(x', Ry^*) - (x^*, Ry^*)| \leq \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} \leq \frac{\epsilon}{2}$
donc on est dans ϕ_1 .
- (x', y^*) est une somme de k variables indépendantes (de $[0, 1]$) d'où, par le lemme 3 : $Pr(\phi_{1,a}^c) \leq 2e^{-\frac{k\epsilon^2}{8}}$
- de même $Pr(\phi_{2,a}^c) \leq 2e^{-\frac{k\epsilon^2}{8}}$ et par le lemme 2 : $Pr(\phi_1^c) \leq 4e^{-\frac{k\epsilon^2}{8}}$.
- Pour contrôler $\pi_{1,i}$, pour tout $i \in [1, n]$, on pose $\psi_{1,i} = \{(x^i, Ry') < (x^i, Ry^*) + \frac{\epsilon}{2}\}.$
- On remarque que $(\phi_1 \cap_{i=1}^n \psi_{1,i}) \subset \pi_{1,i}$.
En effet pour $(p_1, \dots, p_n) = x^*$, on peut sommer les informations des $\psi_{1,i}$ en $\sum_{i=1}^n p_i(x^i, Ry') < \sum_{i=1}^n p_i(x^i, Ry^*) + \sum_{i=1}^n p_i(\frac{\epsilon}{2})$ i.e. $x^* Ry' < (x^*, Ry^*) + \frac{\epsilon}{2}$.
Par $(\pi_{1,i} \cap \psi_1)$ on a :
 $(x', Ry') > (x^*, Ry^*) - \frac{\epsilon}{2} > (x^*, Ry') - \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon}{2} = (x^*, Ry') - \epsilon \geq (x^i Ry) - \epsilon$
donc on est dans $\pi_{1,i}$
Par le même argument, on peut affirmer $Pr(\psi_1^c) \leq 2e^{-\frac{k\epsilon^2}{8}}$.
- Comme $GOOD = \phi_1 \cap_{i=1}^n \pi_{1,i} \cap \phi_2 \cap_{i=1}^n \pi_{2,i}$, par les lemmes 2 et 3 on a :
 $Pr(GOOD^c) \leq Pr(\phi_1^c) + Pr(\phi_2^c) + \sum_{i=1}^n Pr(\pi_{1,i}^c) + \sum_{i=1}^n Pr(\pi_{2,i}^c)$
 $\leq 4e^{-\frac{k\epsilon^2}{8}} + 4e^{-\frac{k\epsilon^2}{8}} + 2n(e^{-\frac{k\epsilon^2}{2}} + 4e^{-\frac{k\epsilon^2}{8}}) < 1$
- $Pr(GOOD) > 0$ et le lemme 1 nous donne l'existence d'approximations qui vérifient le théorème.

□

15.2 Conséquences

Corollaire 9 (Jeux à deux joueurs)

*Pour un jeu à deux joueurs,
il existe un algorithme quasi-polynomial
qui calcule tous les ϵ -équilibres k -uniformes*

Preuve :

[On sait qu'il existe un équilibre de Nash (que l'on peut calculer par la programmation linéaire avec dualité et l'algorithme de Lemke Howson par exemple).

On vérifie de manière exhaustive tous les ϵ -équilibres k -uniformes à partir de cet équilibre. La vérification qu'il s'agit d'un ϵ -équilibre est simple (et polynomiale). lorsqu'on a connaissance de (x^*, y^*) , il suffit de tester chaque sous-formule que compose la formule *GOOD*.

L'algorithme regarde

$$\binom{n+k+1}{k}^2$$

paires de multi-ensembles. Le résultat est obtenu en $O(n^{\ln n})$.

Cependant, le cas intéressant est de ne pas avoir à calculer au préalable un équilibre de Nash : pour des jeux à plus de joueurs, il apparait que les résultats polynomiaux pour l'explicitation d'un équilibre de Nash ne sont plus valables.

On voit que la vérification des $\pi_{1,i}$ et des $\pi_{2,j}$ sont de simples opérations matricielles. Mais la vérification de ϕ_1 ou de ϕ_2 , nécessite la connaissance d'un équilibre.

[∇]

Remarque :

Pour des joueurs avec des nombres de stratégies pures distincts (n_1 et n_2), et avec $k \geq \frac{12 \ln(\max(n_1, n_2))}{\epsilon^2}$, on a le même résultat.

Théorème 21 *Extension de la déduction d' ϵ -équilibres de la connaissance d'un équilibre exact d'un jeu à m joueurs :*

$\forall (s_1^*, \dots, s_n^*)$ un équilibre de Nash pour un jeu à m personnes
et de paiements à l'équilibre : $(p_1^*, \dots, p_m^*)$

$$\forall \epsilon > 0,$$

$$\forall k \leq \frac{3m^2 \ln m^2 n}{\epsilon^2}$$

*Il existe un ensemble $(s'_1, \dots, s'_m)$ de stratégies k -uniformes
de paiements $(p'_1, \dots, p'_m)$ tel que*

- $(s'_1, \dots, s'_m)$ est un ϵ -équilibre.
- $\forall i \in [1, n], |p'_i - p_i^*| < \epsilon$

Remarque :

Dans le théorème 20, on ne garantit des ϵ -équilibres à support logarithmique que lorsque m est indépendant de n .

15.3 Matrices à rang borné

Théorème 22 (Deux joueurs + un équilibre + rang de paiement borné)

$\forall (x^*, y^*)$ un équilibre de Nash
si $\text{rang}(C) < k$,

Il existe une stratégie mixte $\bar{x}$ avec

- $|\text{Support}(x)| \leq k + 1$
- $(\bar{x}, y^*)$ est un point d'équilibre de même paiement que l'équilibre de Nash.
- Conditions similaires pour l'autre joueur.

Théorème 23 (Deux joueurs et support constant)

$\forall (x^*, y^*)$ un équilibre de Nash,
 $\forall \epsilon > 0$,
 $\forall k \leq \frac{5}{\epsilon^2}$

Alors il existe un couple (x, y) de stratégies k -uniformes tel que

- $|(x, Ry) - (x^*, Ry^*)| < \epsilon$
- $|(x, Cy) - (x^*, Cy^*)| < \epsilon$

Extension pour un jeu à m joueurs :

On peut étendre le résultat obtenu pour deux joueurs à m joueurs, mais le support devient en $O(m^2 \ln m)$.

15.3.1 Matrices approximables

Définition 24 Soit C et D des matrices $n \times n$,

On dira que D est une ϵ -approximation de C si $C = D + E$ où $\forall i, j \in [1, n], |E_{i,j}| \leq \epsilon$

Lemme 24 (Approximation de matrices pour approximer les paiements de Nash)

Soit D une ϵ -approximation de C .

Soit (x^*, y^*) un équilibre de Nash pour le jeu à matrices de paiement R et D .

Alors (x^*, y^*) est un 2ϵ -équilibre de Nash pour
Le jeu à matrices de paiement R et C .

Corollaire 10 (Jeux à deux joueurs avec une matrice approximable et petit support)

*Pour tout jeu à deux joueurs avec paiements R et C , et tout $k < n$
Si C peut être approximé par une matrice de rang k*

*Alors il existe un $2\text{-}\epsilon$ -équilibre (x,y) ,
avec $|\text{Support}(x)| \leq k + 1$, Similaire à R .*

Remarque : Pour un jeu à deux joueurs, connaître le support d'un équilibre de Nash implique savoir calculer de façon exacte (et polynomiale) cet équilibre de Nash (par la programmation linéaire).

Corollaire 11 (Jeux à deux joueurs : Complexité de bons cas)

*Pour tout jeu à deux joueurs avec paiements R et C ,
Si R (ce serait symétrique pour C) est de rang constant,
Nous pouvons calculer un équilibre (exact) de Nash en temps polynomial.*

*Si un des joueurs a un nombre constant de stratégies pures,
On peut calculer un équilibre de Nash en temps polynomial.*

Chapitre 16

Discussion et perspectives

Le phénomène “un vecteur de stratégies en équilibre est le point fixe d’une fonction continue d’un simplexe dans lui même” permet à nouveau la réduction de l’existence d’équilibre de Nash au théorème de point fixe de Brouwer de la partie I. Les issues sont alors similaires au cas des point fixes et des équilibres d’Arrow-Debreu. De plus, La dimension d’espace introduite est le produit des espaces des stratégies et les axes de développement et leurs limites précédemment évoquées pour les points fixes s’y rejoignent.

L’algorithme de Lemke Howson a été un pas décisif dans l’effectivité du calcul des équilibres de Nash (à deux joueurs). Il est exponentiel en temps sur certaines instances mais là encore une analyse plus fine mériterait notre attention.

Dans quelques cas particuliers, il est naturel de vouloir imposer une contrainte sur l’équilibre du type “le premier joueur joue avec probabilité α sa première stratégie”. Est-il plus facile dans ce cas de calculer un éventuel équilibre, ou de décider qu’il n’en existe pas ?

Nous avons que $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{1}{n}$, $\alpha > 0$, $\alpha \in [0, \frac{1}{n}]$, $\alpha > 0$, $\alpha \geq \frac{1}{n}$ ou $\alpha < 1$ sont des intervalles pour lesquels l’existence d’équilibre exacte est NP-difficile.

Il reste cependant beaucoup de travail sur ces mêmes questions d’équilibre contraint avec une vision d’ ϵ -équilibre.

La réduction de SAT en équilibres de Nash non triviaux permet de mettre en relation directe

- les affectations de variables qui satisfont une formule logique et
- les équilibres de Nash non triviaux du jeu à deux joueurs symétrique construit à partir de la formule.

Elle a permis de dévoiler la difficulté du calcul du nombre d'équilibres de Nash, mais aussi des espoirs quant à son extension. Un exemple serait de mettre en relation directe :

- une affectation de variables qui produit un poids p dans une formule QSAT et
- un équilibre de Nash (de gain p ?) d'un jeu à construire à partir de la formule.

Plus ambitieux serait encore d'étendre ces approches à des logiques temporelles du type LTL ou un de ces affaiblissements. Le lien serait fait pour formaliser sous un point de vue théorie de jeux, les notions de vérification usuelle.

Les avantages computationnels récents des cas restreints sont :

- L'existence d' ϵ -équilibre à support logarithmique composé de stratégies uniformes, avec une possibilité de calculer ces ϵ -équilibres sous-exponentiellement à partir d'un équilibre.
- L'effectivité polynomiale sous des hypothèses de compacité de représentation développées dans [PR04].

Le travail peut alors se poursuivre en cernant le champ d'application de ces résultats dans des formalisations du type de celle détaillée pour SAT, mais dans des cadres plus expressifs.

Les travaux constructifs autour des équilibres de Nash pour les jeux matriciels infiniment répétés peuvent peut-être jouer des rôles dans l'esprit du "Until" de la logique temporelle, et faire ainsi un pont effectif vers la vérification de nombreux systèmes. Les notions naturelles d'approximations du domaine offriraient alors un bon point de départ pour introduire une nouvelle (?) notion d'approximation dans un objectif de vérification.

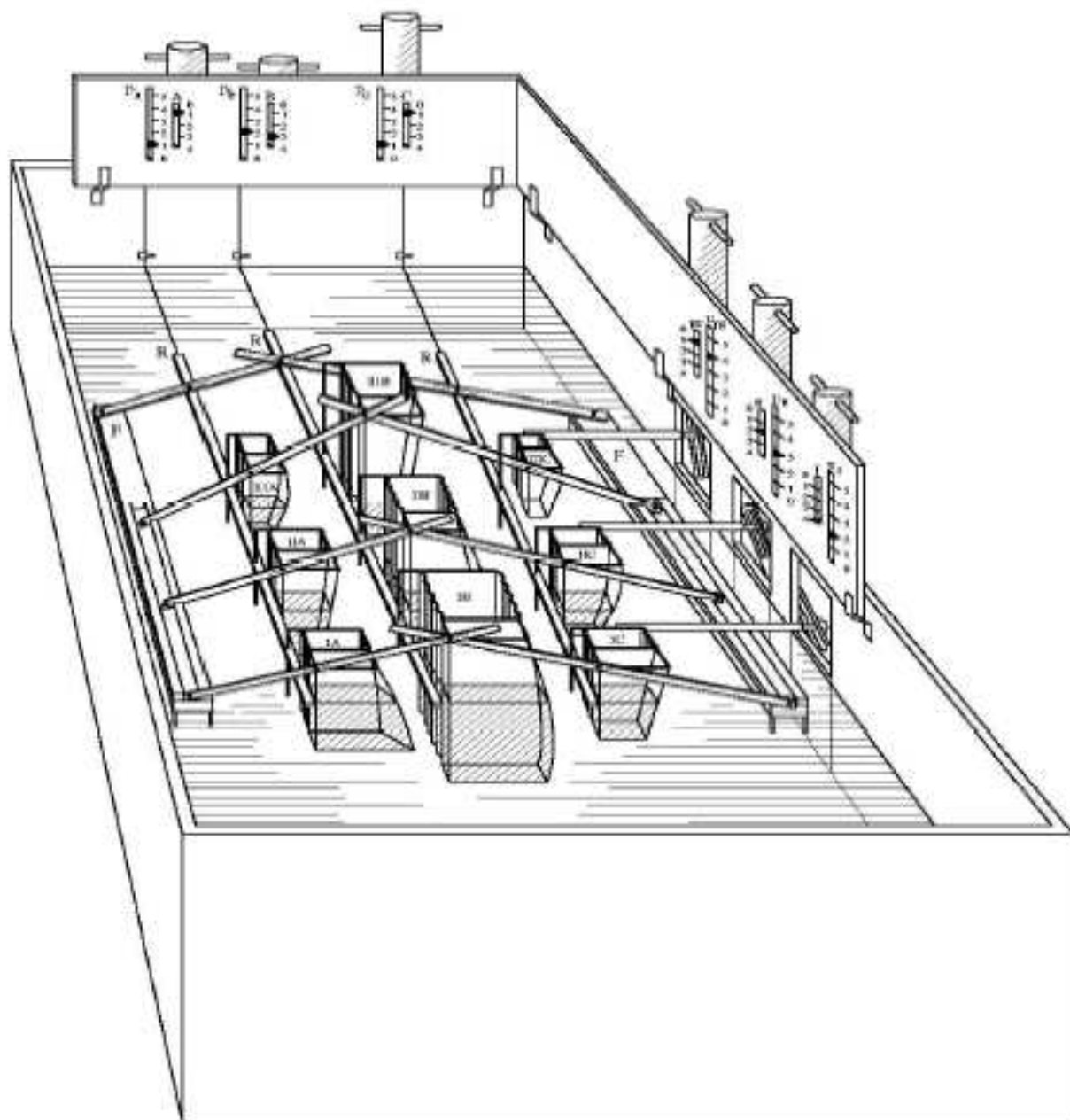
Chapitre 17

Bibliographie

- [BVS02] Bernhard Von Stengel, 2002 :
Computing Equilibria for Two-Person Games.
- [CS03] Bruno Codenotti, Daniel Stefankovic, 2003 :
Simple Bimatrix Games Aren't That Simple.
- [CC] Frederic Choumette et Frederic Colard :
Histoire de la theorie des jeux.
- [DPW03] David P. Williamson, Spring 2003
Lecture Notes on Advanced Algorithms.
- [JZ92] J. Zhao, 1992, Games and Economic Behavior 4, 145-160.
The hybrid solutions of an n-person game,
- [KMNS] M. Kearns, Y. Mansour, A.Y. Ng, S. Singh : Draft :
Game Theory with Restricted Strategies
- [LMM02] Lipton, Markakis, Mehta, 2002 :
Playing Large games Using Simple Strategie.
- [LS03] Michael L. Littman, Peter Stone, 2003 :
A polynomial time Nash equilibrium algorithm for repeated games
- [Pap02] The Structure and Comlexity of Nash Equilibrium
For Selfish Routing Games.
- [PR04] Christos H. Papadimitriou, Tim Roughgarden, 2004 :
Computing Equilibria in Multi-Player Games.
- [VCS03] V. Conitzer, T. Sandholm, 2003 :
Complexity Results about Nash Equilibria.

Quatrième partie

ANNEXES



Irving Fisher 1891 (concave functions) : Hydraulic apparatus for calculating equilibrium

FIG. 17.1 – Equilibre : Une preuve expérimentale

Index

- Approximation de Point Fixe, 24
- Arrow Debreu, 36
- Base Faisable, 32
- Bibliographie
 - Partie I, 34
 - Partie II, 54
 - Partie III, 82
- Classe mixte, 72
- Classe stratégique close par mixage, 71
- Classe suffisamment riche, 73
- Coloration de Lemke Howson, 63
- Coloriage d'une fonction continue, 23
- Ensemble tendu, 40
- Epsilon Equilibre de Nash, 74
- Equilibre de Nash, 58
- Equilibre de Nash
 - restreint, 71
- Espérance Sociale, 70
- FNP, 21
- FP, 21
- Jeu associé à SAT, 65
- Le Problème CP, 46
- Le Problème CPG, 48
- Le Problème FEAS, 47
- Lemme de Remplacement, 28
- Pareto Point, 51
- Point fixe de Brouwer, 23
- PPA, 22
- PPAD
 - Complétude de 3D-Sperner, 22
- Primitif
 - Complet, 27
 - définition, 25
- Rendement Unitaire, 38
- Simplexe, 17
- Sous-graphe égalité, 38
- Sperner
 - 2D, 12
 - 3D, 16
 - Généralisé, 17
- Stratégie mixte, 58
- Subdivision Barycentrique, 20
- Support d'une stratégie, 58
- TFNP, 21
- Triangulation
 - Cube, 14
 - Définition, 17
 - Hypercube, 19
- utilité CES, 49